Durée : 6 heures
Série : G

SESSION 2005 **CLASSES DE PREMIERE**

MATHEMATIQUES

Les calculatrice électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Dans ce problème, on étudie des fonctions continues convexes sur un intervalle ouvert et certaines de leurs propriétés.

RAPPELS ET NOTATIONS :

(R1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
Soit (λ_n) une suite de nombre réels appartenant à I.
Si la suite (λ_n) converge vers un réel $\lambda \in$ I alors, la suite $(f(\lambda_n))$ converge vers $f(\lambda)$; c'est-à-dire, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\lambda_n) = f(\lambda)$.

(R2)

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels ($n\in\mathbb{N}^*$).

On note $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

(R3)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x, le nombre entier noté E(x) et défini par :

$$E(x) \le x < E(x) + 1.$$

PARTIE I :

I-1- ETUDE D'UN EXEMPLE

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que : $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ et $\forall\, x_1, x_2 \in\ ]0, +\infty[$, on a : $h[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \le \alpha\, h(x_1) + (1-\alpha)\, h(x_2)$.

(0,5 point)

I-2- Définition 1 :

Un ensemble G de points d'un plan est dit convexe si pour tous points M_1 et M_2, appartenant à G, le segment $[M_1, M_2]$ est contenu dans G.

I- 2- 1 Représenter un exemple de figure géométrique plane convexe et un autre non convexe. **(0,5 point)**

Définition 2 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie et continue sur un intervalle ouvert I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit G_f l'ensemble des points situés au dessus de ($\mathcal{C}_f$) ; c'est-à-dire : $G_f = \{M(x,y) / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.

La fonction f est dite convexe si l'ensemble G_f est convexe.

I- 2- 2 Tracer une courbe représentant une fonction convexe et une autre représentant une fonction non convexe. **(0,5 point)**

I- 3- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$.

I- 3- 1- Montrer que : un point M(x, y) est sur le segment $[M_1, M_2]$ si et seulement si, il existe un réel $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $\overrightarrow{MM_1} = \lambda \overrightarrow{M_2M_1}$. **(0,5 point)**

I- 3- 2- En Déduire que le segment $[M_1 M_2]$ est défini par la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \\ y = \lambda y_2 + (1-\lambda)y_1 \end{cases}, \quad \lambda \in [0, 1].$$ **(0,5 point)**

I- 4- 1- Caractérisation géométrique

Montrer qu'une fonction f continue sur un intervalle ouvert I est convexe si et seulement si, pour tous points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de la courbe situés entre M_1 et M_2 sont en dessous du segment de droite $[M_1 M_2]$. **(0,5 point)**

I- 4- 2- Caractérisation analytique

Définition 3

Soit $\lambda \in [0,1]$ et f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dira que f vérifie la propriété $P(\lambda)$ sur I si :

$\forall x_1, x_2 \in I, \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$.

Déduire de **I- 4- 1-** qu'une fonction continue sur un intervalle ouvert I est convexe si et seulement si, elle vérifie la propriété $P(\lambda)$ sur I. **(0,5 point)**

I- 4- 3- (Application de **I- 4- 2**)

Montrer que les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = x^2$ et $g(x) = |x|$ sont convexes. **(0,5 point)**

I- 5- (Autre caractérisation analytique) :

On veut montrer qu'une fonction continue sur un intervalle ouvert I est convexe si et seulement si elle vérifie P(1/2).

I- 5- 1- Montrer que si f est convexe, alors f vérifie P(1/2). **(0,5 point)**

I- 5- 2- Soit $F_n = \left\{ \frac{k}{2^n} / k \in \mathbb{N}, k \leq 2^n \right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

On pose $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Montrer que tout réel $\lambda \in [0, 1]$ est limite d'une suite (λ_n) d'éléments de F.

Indication : pour n fixé, poser $k = E(2^n\lambda)$. **(0,5 point)**

I- 5- 3-1 Montrer par récurrence sur n que :
$\forall \lambda_n \in F_n$, f vérifie $P(\lambda_n)$. **(0,5 point)**

I- 5- 3- 2- En déduire, en utilisant la propriété (R_1) que f est convexe sur I. **(0,5 point)**

I- 5- 4- Montrer que la fonction tangente notée tg et définie par $tg(x) = \tan x$, $\forall x \in]0, \pi/2[$ est convexe. **(0,5 point)**

Indication : Poser $u = \tan(\frac{x}{2})$ et $v = \tan(\frac{y}{2})$, puis exprimer $\tan(\frac{x+y}{2})$ et $\frac{\tan x + \tan y}{2}$ en fonction de u et v.

I- 5- 5- Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle ouvert I. Montrer que si f est convexe sur I, alors $(-f^{-1})$ est convexe sur $J = f(I)$, avec f^{-1} est la réciproque de f. **(0,5 point)**

I- 5- 6- En déduire que la fonction définie par $f(x) = -\sqrt{x}$ est convexe sur $]0, +\infty[$. **(0,5 point)**

PARTIE II

On se propose de prouver la propriété **(P2)** suivante appelée théorème de Rolle.

(P2) : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur [a, b],et dérivable sur]a, b[tel que $f(a) = f(b)$ alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

II- 1- 1- Etudier le cas où f est une constante. **(0,5 point)**

II- 1- 2- On suppose que f n'est pas constante.

II- 1- 2- 1 Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m, M]$. **(0,5 point)**

II- 1- 2- 2- Si $f(a) = f(b) = m$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$.
En déduire que : $\frac{f(x) - M}{x - c} < 0$ si $x > c$ et $\frac{f(x) - M}{x - c} > 0$ si $x < c$.
Montrer alors que $f'(c) = 0$. **(01 point)**

II- 1- 2- 3- Si $f(a) = f(b) = M$, montrer de manière analogue qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. **(0,5 point)**

II- 1- 2- 4- Si $m \neq f(a)$, $M \neq f(b)$ et $f(a) = f(b)$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
(0,5 point)

.../... 4

II- 1- 3 Conclure que, II- 1 et II- 2 permettent bien de prouver le théorème de Rolle. **(0,5 point)**

II- 2- Théorème des accroissements finis :

On se propose de démontrer la propriété suivante appelée Théorème des accroissements finis.

(P3) : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

II- 2- 1- Montrer que le théorème de Rolle permet de démontrer le théorème des accroissements finis dans le cas où $f(a) = f(b)$. **(0,5 point)**

II- 2- 2- Supposons que $f(a) \neq f(b)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction g définie par : $g(x) = x\,[f(b) - f(a)] - (b - a)\,f(x)$, démontrer le théorème des accroissements finis. **(0,5 point)**

II- 2- 3- Les réponses aux questions **II- 2- 1-** et **II- 2- 2-** suffisent-elles pour la preuve du théorème des accroissements finis ? **(0,5 point)**

PARTIE III

Dans cette partie, on étudie plusieurs caractérisations d'une fonction dérivable et convexe sur un intervalle ouvert.

III- 1- Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si f vérifie la propriété suivante (P4).

$\forall x_1, x_2 \in I, \forall x \in I, \; x_1 < x < x_2.$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

(0,5 point)

III- 2- On suppose que f est dérivable sur I.

III- 2- 1- En utilisant (**P4**), montrer que la dérivée f ' de f sur I est croissante. **(0,5 point)**

III- 2- 2- Réciproquement, on suppose que f ' est croissante. **(0,5 point)**
Montrer que f est convexe sur I.

Indication : Si $x_1, x, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x < x_2$, appliquer le théorème des accroissement finis à f sur $[x_1, x]$ et $[x, x_2]$ avec $x_1 < x < x_2$.

III- 3- On suppose que f admet une dérivée seconde. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f '', la dérivée seconde de f sur I pour que f soit convexe sur I, en utilisant **III- 2- 1-** et **III- 2- 2-** **(0,5 point)**

…/… 5

III- 4- Soit n un entier naturel. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f définie par : $f(x) = x^n$ soit convexe sur $\mathbb{R}$, en utilisant **III- 3-**. **(0,5 point)**

III- 5- Dans cette sous partie, on veut montrer que si f admet une dérivée première sur]a, b[, alors f est convexe si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente en tout point de]a, b[.

III- 5- 1- Supposons que f est une fonction convexe sur]a, b[. Soit $x_0 \in$]a, b[.
En utilisant (P4), montrer que $\forall\, x > x_0$, $x \in$]a, b[

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

et $\forall\, x < x_0$ $x \in$]a, b[$$f'(x_0) \geq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0. **(01 point)**

III- 5- 2- Réciproquement, on suppose que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en tout point M d'abscisse $x \in$]a, b[.
Montrer alors que si f est dérivable sur]a, b[, sa dérivée f ' est croissante sur]a, b[et en déduire que f est convexe. **(0,5 point)**

Partie IV Quelques applications

IV- 1- Dans cette section, on généralise la formule P(λ) de **I- 4- 2-**.
On considère que f est une fonction convexe sur un intervalle I. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels de I et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels de [0, 1] tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

IV- 1- 1- Démontrer par récurrence sur n qu'on a : $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \forall i \in \mathbb{N}^*$.

(0,5 point)

IV- 1- 2- Démontrer par récurrence sur n qu'on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . f(x_i)$. **(0,5 point)**

IV 1- 3- On prend les x_i dans]0 ,+∞ [.

En utilisant **III- 4-** et **IV- 1- 1-** , montrer que : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{2k} \leq n^{2k-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}$.**(0,5 point)**

IV- 2- Comparaison de quelques moyennes usuelles

Soit x_1, x_2 ......, x_n des réels strictement positifs.

On pose $m_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $m_h = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$ et $m_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Ces réels sont appelés respectivement moyenne arithmétique, harmonique et quadratique.

CLASSES DE PREMIERE

IV- 2- 1- Démontrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$; comparer alors m_a et m_q. **(0,5 point)**

IV- 2- 2- Démontrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$; comparer alors m_a et m_h. **(0,5 point)**

IV- 3- Soit f une fonction dérivable et convexe sur un intervalle ouvert I. Démontrer que s'il existe deux réels a et b $\in$ I tels que f(a) = f(b) avec a < b, alors, f admet un minimum absolu sur I en un point $x_0 \in]a, b[$. **(01 point)**

FIN DU SUJET