UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

❒❒◆❒❒

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

06 G 18 bis A 01
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 – Coeff. 8

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 : (4 points)

1) On considère l'équation différentielle : $y' + y = \dfrac{e^{-x}\cos x}{2 + \sin x}$ (E).

f étant une fonction numérique dérivable sur ∇, on pose : $g(x) = e^{x} f(x)$.

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

b) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases}$; $t \in \nabla$.

a) Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(-t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4} + \pi\right]$.

c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe (Γ) .

Exercice 2: (4 points)

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événements suivants :

A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules. »
B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »
C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »
D : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules. »

a) Calculer $p(D/_{A})$, $p(D/_{B})$ et $p(D/_{C})$.

b) En déduire la probabilité des événements D ∍ A, D ∍ B et D ∍ C.

Calculer p(D) [On remarquera que D = D ∍ (A (B (C)].

Exercice 3: (4 points)

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre O tel que AB = 3 a et BC = $a\sqrt{3}$; où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCO .

2) Soit E le point du segment [BD] tel que $BE = \frac{3}{4}BD$. Donner une construction géométrique du centre Ω de la similitude directe s telle que s (B) = O et s (E) = C .

3) On suppose dans la suite que a = 1 et on pose : $\vec{u} = \frac{1}{AB} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD} \cdot \vec{AD}$; on munit ensuite le plan du repère orthonormal direct $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$,

a) déterminer les affixes de B et de O.

b) En déduire l'écriture complexe de l'application s.

4) Déterminer l'affixe de Ω et celle du point A ' = s (A) .

5) On considère la suite de points M_n d'affixes z_n définie par $M_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$.

a) démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme α_0 et la raison.

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$.

Problème :

Dans ce problème on calcule dans la partie A la valeur d'une intégrale et on étudie dans la partie B une suite numérique (I_n) et quelques unes de ses différentes propriétés.

Partie A : Calcul de $I = \int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t} - 1}\, dt$.

Soit g et G les fonctions définies sur $[\,0 ; +\infty\,[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

a) Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

b) Calculer $(H \circ \tan)'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que $(H \circ \tan)(x) = x$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer alors H(1) .

2) Pour tout $x \in [\,0 , +\infty\,[$, on pose : $F(x) = g(x) - H \circ g(x)$,

a) Vérifier que F et G sont dérivables sur $]\,0 , +\infty\,[$ et que pour tout $x \in\,]\,0 , +\infty\,[$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que G (x) = F (x). Calculer alors I. [On remarquera que $I = G(\ln\sqrt{2})$].

Epreuve du 1[er] groupe

Partie B : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{2x} - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln\sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n}{2}}\, dx \quad \text{puis } I_0 = \ln\sqrt{2}$$

1) a) Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = 2\,[1 + f(x)] \qquad (1).$$

b) Montrer en utilisant la relation (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \qquad (2).$$

Vérifier que la relation (2) reste encore valable pour n = 0 .

c) En remarquant que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) En remplaçant n par n + 2 , dans la relation (2) , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$. En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n .

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{p} U_{4n+1}$ en fonction de I_{4p+5} et de I_1.

c) Calculer la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la somme

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

BAREME

EX 1 : 04pts					**EX 2 : 04 pts**			**EX 3 : 04 pts**						
1		**2**			**1**	**2**		**1**	**2**	**3**		**4**	**5**	
a	b	a	b	c		a	b			a	b		a	b
1	1	0.5	0.5	1	1	1.5	1.5	0.25	1	0.25	0.5	0.5	0.5	1

PROBLEME : 08 pts									
A				**B**					
1		**2**		**1**			**2**		
a	b	a	b	a	b	c	a	b	C
1	1	1	1	0.5	1	0.5	0.75	0.75	0.5