UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 12

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

08 G 18bis A 02
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION PROPOSEE PAR LES AUTEURS

EXERCICE 1 (04 points)**.** Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, -1$ et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c, où a, b, c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1. Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X. **1 pt**

2. Soient A, B, C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ).

a. Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A,1); (B,2); (C,4)\}$. **1 pt**

b. On pose : $\varphi(M) = \dfrac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de (Δ).

Montrer que $\varphi(G) = V(X)$. **1 pt**

c. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $\varphi(M) = 3$. **1 pt**

EXERCICE 2 (04 points)**.** Soit f la fonction définie sur $[1, +8[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

En utilisant la fonction f, on se propose de déterminer la limite de la suite de terme général $Sn = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Soit k un entier non nul. Etablir les relations suivantes :

a. $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k+1}$.

b. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - f(k)$.

2. a. Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ **0,25 pt**

b. Soit $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+1)} = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

Calculer U_n en fonction n et déterminer $\displaystyle\lim_{\to +\infty} U_n$. **0,5+0,25=0,75 pt**

c. Déduire des résultats de la question (1) que : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq U_n$.

Déterminer alors $\displaystyle\lim_{\to +\infty} \sum_{k=n}^{2n} = f(k)$. **0,5+0,5=1 pt**

d. Montrer que

$f(k) = S_n - \ln \dfrac{2n+1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. **0,5+0,5=1 pt**

EXERCICE 3 (04 points)**.** Le plan est orienté. PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de $[QR]$ et $[RP]$. Q_1 est le symétrique de Q par rapport à J.

1. Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose $f = t \circ r$.
a. Faire une figure.
Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q. **1 pt**
b. Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R. **0,25+0,25=0,5 pt**
c. Donner la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques. En deduire la nature du triangle IPP' . **0,25+0,25+0,5=1 pt**

2. Soit s la similitude directe telle $s(J) = P$ et $s(R) = I$.
a. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(I) = P'$. **0,5 pt**
b. Soit Ω le centre de s. Montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et les points Ω, P, J et Q_1 d'autre part sont cocycliques.
En déduire la position de Ω puis construire ce point. **0,25+0,25+0,5=1 pt**

PROBLEME (08 points)**.**

1. Soit l'équation différentielle :
$(E_m) : my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.
a. Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E_m). **1 pt**
b. Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonn ées $(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$. **0,5 pt**

2. Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}\cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un rep'ere orthogonal (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). **1 pt**

3. Soit g le prolongement à $\mathbb{R}$ de f.
a. Comparer $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g. **0,5 pt**
b. On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives. respectives et (G) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part, à (G) et (C_v) d'autre part ?
0,25+0,25 =0,5 pt
c. Montrer qu'en chacun de ces points communs les deux courbes ont même tangente.
0,25+0,25 =0,5 pt
d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. (On fait remarquer que : $-1 = \cos t = 1$). **0,25 pt**

4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)\, dt$.
a. Calculer a_k. (On pourra faire deux fois une intégration par parties.) **0,5 pt**
b. Pour tout réel n on pose et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |ak|$.
Montrer que la suite (s_n) admet une limite.
Interpréter géométriquement ce résultat. **0,5+0,25 =0,75 pt**

5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe paramétrée. (Λ) définie par le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\cos t \\ y(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\sin t \end{array}\right. ; \text{ pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

a. Etudier les variations des fonctions x et y et dresser le tableau des variations conjointes.

0,75 pt

b. Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\overrightarrow{V}_t$ le vecteur dérivé lui correspondant.
Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}_t$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM}_t, \overrightarrow{V}_t)$ est constant.

0,5+0,5 =1 pt

c. Représenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points de paramètres $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0

0,25+0,25+0,25 =0,75 pt