UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 12

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

08 G 18bis A 02
Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. a. En désignant par b le terme central de la progression arithmétique et par r sa raison, on peut écrire : $a = b - r$ et $c = b + r$.

Les autre données se traduisent alors par :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\{-1,1,2\}} p(X=k) & = & 1 \\ E(X) & = & 1 \end{cases} \text{ c'est à dire } \begin{cases} \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c & = & 1 \\ 1.\mathrm{e}^a - 1.\mathrm{e}^b + 2.\mathrm{e}^c & = & 1 \end{cases} \text{ Soit } \begin{cases} \mathrm{e}^b\mathrm{e}^{-r} + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^b\mathrm{e}^r & = & 1 \\ \mathrm{e}^b\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^b + 2\mathrm{e}^b\mathrm{e}^r & = & 1 \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre et en simplifiant par e^b, on trouve $\mathrm{e}^r = 2$ soit $r = \ln 2$.

La première équation devient alors :

$(\frac{1}{2} + 1 + 2)\mathrm{e}^b = 1$ c'est à dire $\mathrm{e}^b = \frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{b = \ln \frac{2}{7}}$.

Ensuite $a = b - r = \ln\frac{2}{7} - \ln 2 \Rightarrow \boxed{a = \ln\frac{1}{7}}$ et $c = b + r = \ln\frac{2}{7} + \ln 2 \Rightarrow \boxed{c = \ln\frac{4}{7}}$.

Pour calculer la variance, calculons d'abord $E(X^2)$.

$E(X^2) = 1^2\mathrm{e}^a + (-1)^2\mathrm{e}^b + 2^2\mathrm{e}^c = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + 4\frac{4}{7} = \frac{19}{7}$.

Alors $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{19}{7} - 1 \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{12}{7}}$.

2. a. $x_G = \frac{1}{7}(1.x_A + 2x_B + 4x_C) = 1$ donc $G = A$.

b. $\varphi(G) = \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2\right]$.

Soit, en se souvenant que $G = A$:

$\varphi(G) = \frac{1}{7}\left[2\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AC}^2\right] = \frac{1}{7}(2.4 + 4.1) \Rightarrow \boxed{\varphi(G) = \frac{12}{7} = V(X)}$.

On peut écrire en utilisant la relation de Schales et en développant :

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}\left[(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2\right]$$

$$\varphi(M) = \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}) + 4(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC})\right]$$

$$\varphi(M) = \overrightarrow{MG}^2 + \frac{1}{7}\left[\overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 4\overrightarrow{GC}^2\right] + \frac{1}{7}.2\overrightarrow{MG}.\left[\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC}\right].$$

Le troisième du second membre est nul parce que G est le barycentre du système $\left[(A,1),\ (B,2),\ (C,4)\right]$.
Donc, $\varphi(M) = \overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$.

La relation $\varphi(G) = 3$ est alors équivalente à : $\overrightarrow{MG}^2 = \dfrac{9}{7}$ ou $MG = 3\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Par conséquent

$\boxed{(\Gamma) = \left\{M_1, M_2\right\} \text{ où } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont les deux points de } (\Delta)}$

$\boxed{\text{dont la distance au point } A \text{ est } -3\dfrac{\sqrt{7}}{7} \text{ et } 3\dfrac{\sqrt{7}}{7}}$

Correction de l'exercice 2.

1. a. On a, pour tout réel x compris entre k et $k+1$: $\dfrac{1}{k+1} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{k}$.

Puis en intégrant : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$.

c'est à dire $\displaystyle\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{k}$.

b. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k = \ln\frac{k+1}{k} = \frac{1}{k} - f(k)$.

2. a. En réduisant le deuxième membre au même dénominateur, on obtient :
$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$

Donc a et b sont tels que $\forall x \neq 0$ et -1, $(a+b)x + a = 1$. Alors $a+b=0$ et $a=1$; ce qui entraîne $b=-1$.

Par conséquent $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

3. a. On a $\displaystyle U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \sum_{k=n}^{2n} \Big[\alpha_k - \alpha_{k+1}\Big]$ avec $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$.

Donc en procédant à une ittération : $\boxed{U_n = \alpha_n - \alpha_{2n+1} = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}}$. Ensuite $\boxed{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 0}$.

b. Dans les inégalités de la question **1.a.**, remplaçons l'intégrale par sa valeur tirée de la question **1.b.**

$\dfrac{1}{k+1} \le \dfrac{1}{k} - f(k) \le \dfrac{1}{k}$.

ce qui permet d'encadrer $f(k)$:

$0 \le f(k) \le \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Puis sommons membre à membre ces inégalités depuis $k = n$ à $2n$, on obtient la relation demandée :

$\displaystyle 0 \le \sum_{k=n}^{2n} f(k) \le \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = U_n$

Comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} U_n = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0}$.

c. La relation établie dans la question **1.b.** donne par sommation :

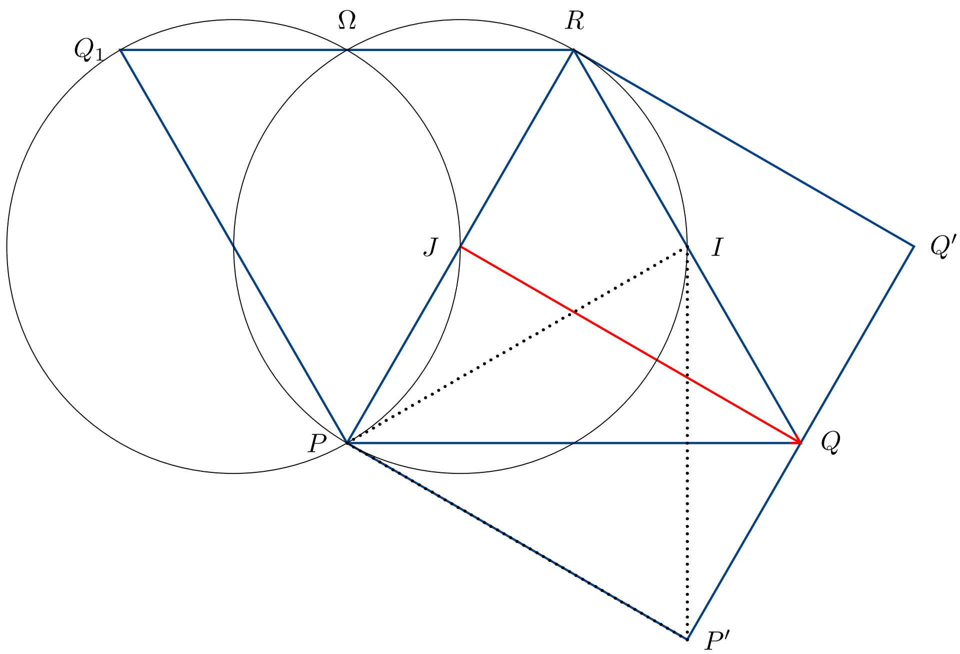
$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$
ou en faisant intervenir la relation de Schales pour les intégrales :
$\displaystyle\int_n^{2n+1}\frac{dx}{x}=S_n-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$
Ensuite en intégrant :
$\displaystyle\ln(k+1)-\ln k=S_n-\sum_{k=n}^{2n}f(k)$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}f(k)=S_n-\ln\frac{2n+1}{n}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)=0$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2$, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}S_n=\ln 2}$

Correction de l'exercice 3.

1. a. Le point P' est tel que
$f(P)=t\circ r(P)=t(P)=P'$.
Donc le point P' est entièrement défini par la relation $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{JQ}$;
$\boxed{P' \text{ est tel que } JPP'Q \text{ soit un parallélogramme}}$.
Le point Q' est tel que
$f(Q)=t\circ r(Q)=t(R)=Q'$.
Donc le point Q' est entièrement défini par la relation $\overrightarrow{RQ'}=\overrightarrow{JQ}$;
$\boxed{Q' \text{ est tel que } JQQ'R \text{ soit un parallélogramme}}$.
La droite (IJ) est une droite des milieux pour le triangle PQR, donc JIR a même nature que PQR :
$\boxed{JIR \text{ est équilatéral direct}}$
La droite (JQ) est la médiatrice du segment $[P,R]$ parce que le triangle PQR est équlatérale. Donc, puisque J est le milieu de $[Q,Q_1]$, l'image PQ_1R du triangle équilatérale direct PQR par la symétrie orthogonale d'axe (PR) est un triangle équilatérale indirect.
r est la rotation de centre P et d'angle $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})=\frac{\pi}{3}$. Donc $r(R)=Q_1$.
Ensuite, $f(R)=t\circ r(R)=t(Q_1)=J\Rightarrow\boxed{f(R)=J}$.
On sait que $f=t\circ r$ est une rotation de même angle que r c'est à dire $\frac{\pi}{3}$.
La relation $f(R)=J$ et JIR est équilatéral direct entraîne que le centre de f est I.
$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } I \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$
On en déduit, puisque $f(P)=P'$ que $\boxed{\text{le triangle } IPP' \text{ est équilatéral direct}}$.



2.

Antécédent	Ω	J	R	I
Image par s	Ω	P	I	P'

a. L'angle de s est $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI})$ $\boxed{\text{L'angle de } s \text{ est } -\frac{\pi}{6}}$

Le rapport de s est $\dfrac{PI}{JR}$. Or $PI = PR\cos\dfrac{\pi}{6} = 2JR\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\boxed{\text{le rapport de } s \text{ est } \sqrt{3}}$.

On a $(\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP'}) = (\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IP'}) = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$ angle de s.

$\dfrac{IP'}{RI} = \dfrac{IP}{RI} = \sqrt{3}$ rapport de s.

Les trois conditions :

$$\begin{cases} s(R) & = & I \\ (\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{IP'}) & = & \text{angle de } s \\ \dfrac{IP'}{RI} & = & \text{rapport de } s \end{cases} \quad \text{suffisent pour dire que } s(I) = P'$$

b. Puisque les similitudes planes directes conservent les angles, on peut lire dans le tableau précédent que : angle de $s = (\overrightarrow{\Omega R}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI})$.

Or $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{PI}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PI})$ parce que le point J appartient au segment $[P, R]$.

Donc $(\overrightarrow{\Omega R}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PI})$

et comme les quatre points Ω, R, P et I ne sont pas alignés, ils sont cocycliques.

De même $-\dfrac{\pi}{6} =$ angle de $s = (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega P})$.

D'un autre côté, la droite (Q_1J) étant la bissectice du triangle équilatérale indirect PQ_1R, l'angle $(\overrightarrow{Q_1J}, \overrightarrow{Q_1P})$ vaut $-\dfrac{\pi}{6}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega P}) = (\overrightarrow{Q_1 J}, \overrightarrow{Q_1 P})$ puis que les points Ω, J, P et Q_1 sont cocycliques

En résumé, le point Ω appartient à l'intersection des deux cercles C_1 et C_2 ; où C_1 est le cercle contenant les points P, I et R et C_2 le cercle contenant les points P, J et Q_1.

De plus le point Ω est différent de P parce que Ω est fixé par s et P non.

Ces conditions définissent parfaitement le point Ω

Correction du problème.

1. a. Nous sommes en présence d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants de degré un ou deux selon que m est égal à 0 ou non.

L'équation caractéristique est :

$$(E_m^c): \quad mr^2 + 2r + 2 = 0$$

- Si $m = 0$, (E_m^c) est une équation du premier degré. Sa seule racine est $r_0 = -1$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = k\mathrm{e}^{-t}$, k constante réelle.
- Si $m \neq 0$, (E_m^c) est une équation du second degré dont le discriminant réduit est $\Delta' = 1 - 2m$.

* Si Δ' est égal à 0 c'est à dire $m = \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a une racine double $r_0 = -\dfrac{1}{m} = -2$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = (at + b)\mathrm{e}^{-2t}$, a et b constantes réelles.

* Si Δ' est > 0 c'est à dire $m < \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a deux racines réelles simples $r_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1-2m}}{m}$ et $r_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1-2m}}{m}$.
La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = a\mathrm{e}^{r_1 t} + b\mathrm{e}^{r_2 t}$, a et b constantes réelles.

* Si Δ' est < 0 c'est à dire $m > \dfrac{1}{2}$, l'équation (E_m^c) a deux racines complexes simples conjuguées $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2m-1}}{m} = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{2m-1}}{m} = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{m}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{2m-1}}{m}$.

La solution générale de l'équation (E_m) est alors $y = \mathrm{e}^{\alpha t}(a\cos\beta t + b\sin\beta t)$, a et b constantes réelles.

b. Notons h la solution de (E_1) dont la courbe passe par le point A et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

On doit alors avoir $h(0) = 1$ et $h'(0) = -1$.

Ici $m = 1$ est $>$ à $\dfrac{1}{2}$, donc h s'écrit : $h(t) = \mathrm{e}^{-t}(a\cos t + b\sin t)$, a et b constantes réelles.

$h'(t) = \Big[(b-a)\cos t - (b+a)\sin t\Big]\mathrm{e}^{-t}$.

Les conditions satisfaites par h deviennent :

$h(0) = a = 1$ et $h'(0) = b - a = -1$ c'est à dire $a = 1$ et $b = 0$, puis $\boxed{h(t) = \cos t\ \mathrm{e}^{-t}}$

2. La fonction f est continue et dérivable dans $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in I,\ f'(t) = -(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^{-t}$ (déjà calculé dans la question précédante).

L'équation $\cos t + \sin t = 0$ est équivalente à $\cos(t - \dfrac{\pi}{4}) = 0$. Ses solutions dans $\mathbb{R}$ sont telles que $t - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ soit $t = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de cette équation dans I sont alors $t_0 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $t_1 = -\dfrac{\pi}{4}$.

Cette équation et la dérivée f' ont les mêmes zéro.

Pour déterminer le signe de f' on peut résoudre des inéquations trigonométriques.

Mais on peut aussi dire que dans tout intervalle où f' ne s'anulle pas, elle garde un signe constant parce qu'elle est continue. C'est une application très pratique du théorème des valeurs intermédiaires.

$-\frac{\pi}{3}$ appartient à l'intervalle $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(-\frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$ est > 0, donc f' est > 0 dans I_1.

0 appartient à l'intervalle $I_2 = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $f'(0) = -1$ est < 0, donc f' est < 0 dans I_2.

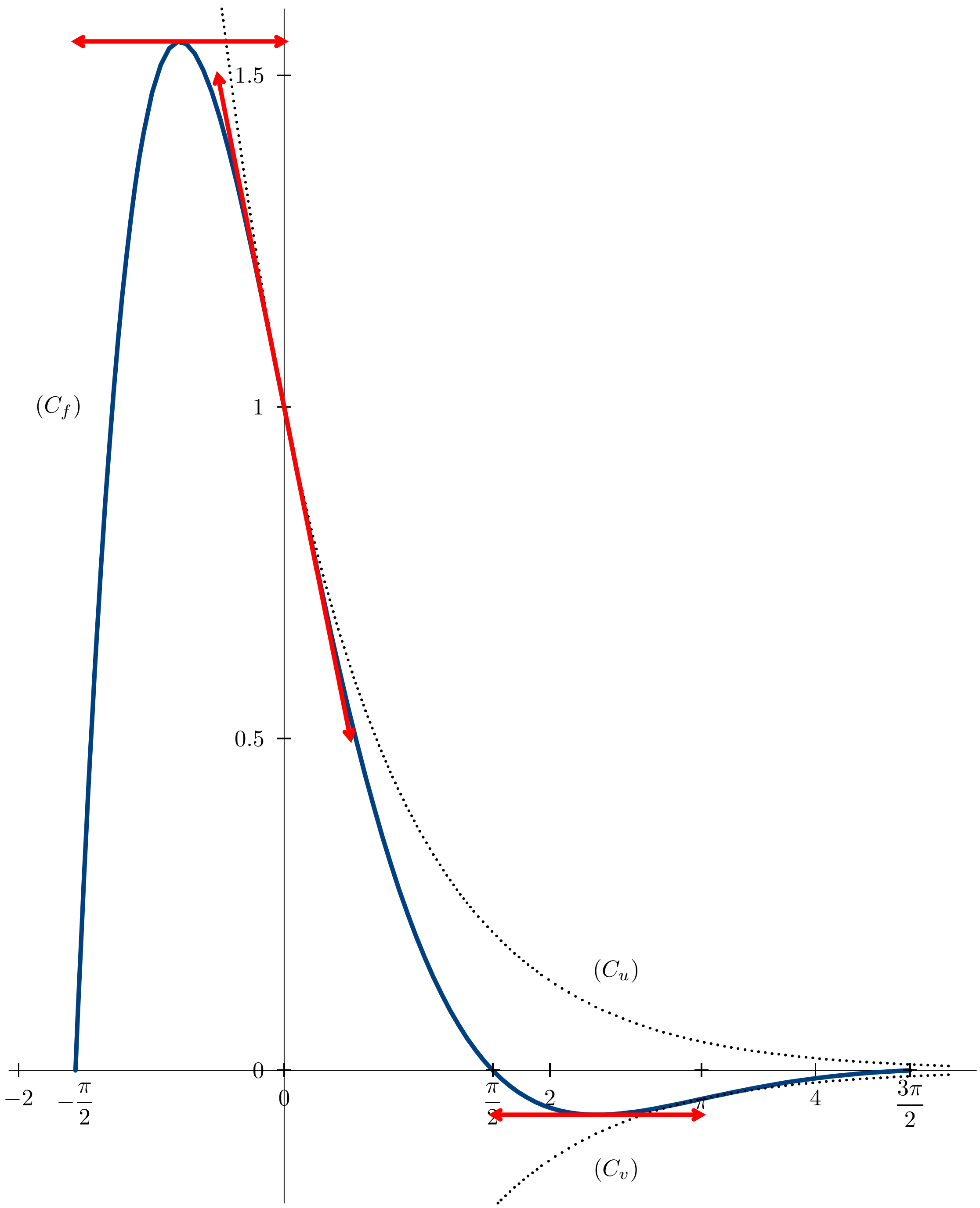
π appartient à l'intervalle $I_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $f'(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi}$ est > 0, donc f' est > 0 dans I_3.

Voici le tableau de variations de f.

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	r	$\searrow$	s	$\nearrow$	0

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$$

Et voici les courbes représentatives de f, u et v.



3. a. Pour tout k appartenant à $\mathbb{Z}$ et tout t appartenant à $\mathbb{R}$, $g(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-t-2k\pi}\cos t$ parce que la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Donc $g(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi}g(t)$.

En dérivant cette dernière expression par rapport à t on obtient :

$g'(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi}g'(t)$.

En particulier pour tout t appartenant à I et tout k appartenant à $\mathbb{Z}$, $g'(t+2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(t)$. Cette relation permet de déterminer parfaitement le signe de g' dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément :

Si t appartient à un intervalle du genre $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]$ ou $\left[\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $g'(t)$ est positif

Si t appartient à un intervalle du genre $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $g'(t)$ est positif

b. Un point M de coordonnées $(t, u(t))$ appartient à $\Gamma \cap C_u$ si et seulement si $u(t) = g(t)$ c'est à dire $\cos t = 1$ ou $t = 2k\pi, k$ appartenat à $\mathbb{Z}$, et alors $u(t) = \mathrm{e}^{-2k\pi}$.

Donc $\Gamma \cap C_u = \left\{M(2k\pi, \mathrm{e}^{-2k\pi}),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Un point M de coordonnées $(t, v(t))$ appartient à $\Gamma \cap C_v$ si et seulement si $v(t) = g(t)$ c'est à dire $\cos t = -1$ ou $t = (2k+1)\pi, k$ appartenat à $\mathbb{Z}$, et alors $v(t) = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$.

Donc $\Gamma \cap C_v = \left\{M((2k+1)\pi, \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. En un point $M(2k\pi, \mathrm{e}^{-2k\pi})$ commun à Γ et à C_u, la pente de la tangente à Γ est
$g'(2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} g'(0) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(0) = -\mathrm{e}^{-2k\pi}$ et la pente de la tangente à C_u est
$u'(2k\pi) = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=2k\pi} = -\mathrm{e}^{-2k\pi}$.

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point M sont confondues.

En un point $M((2k+1)\pi, \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi})$ commun à Γ et à C_v, la pente de la tangente à Γ est
$g'((2k+1)\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} g'(\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} f'(\pi) = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$ et la pente de la tangente à C_u est
$u'((2k+1)\pi) = \mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=(2k+1)\pi} = \mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}$.

Les deux tangentes ayant même pente et passant par le point M sont confondues.

d. $0 \leq \left|\cos t\ \mathrm{e}^{-t}\right| \leq \mathrm{e}^{-t}$. Or $\lim\limits_{t \mapsto \infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{t \mapsto \infty} g(t) = 0$.

4. a. Pour simplifier posons $r_k = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $s_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ de sorte que
$a_k = \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} g_k(t)\ dt$;

ensuite intégrons une première fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & \Rightarrow \quad u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \cos t & \Leftarrow \quad v'(t) = \sin t \end{cases}$$

Alors $a_k = \left[\sin t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} + \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} \sin t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$

intégrons une deuxième fois par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & \Rightarrow \quad u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \sin t & \Leftarrow \quad v'(t) = -\cos t \end{cases}$$

Alors $a_k = \left[\sin t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} + \left[-\cos t\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} - \displaystyle\int_{r_k}^{s_k} \cos t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt.$

c'est à dire $a_k = \left[(\sin t - \cos t)\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k} - a_k$ ou $a_k = \dfrac{1}{2}\left[(\sin t - \cos t)\ \mathrm{e}^{-t}\right]_{r_k}^{s_k}$.

Or $\cos r_k = \cos s_k = 0$ et $\sin r_k = (-1)^{k+1}$ et $\sin s_k = (-1)^k$.

Donc $a_k = \dfrac{1}{2}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{-s_k} - (-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-r_k}\right] = \dfrac{1}{2}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{-s_k} + \mathrm{e}^{-r_k}\right]$

$a_k = \dfrac{1}{2}(-1)^k \mathrm{e}^{-k\pi}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right]$

b. $s_n = C_h \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k\pi}$ avec $C_h = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

La somme est la somme des $n+1$ premiers termes de la progression géomtrique de premier terme 1 et de raison $e^{-\pi}$.

Donc $s_n = C_h.1.\dfrac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}$.

Puisque $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi} = 0$, la suite (s_n) admet une limite et cette limite est égale à :

$s = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} s_n = C_h \dfrac{1}{1-e^{-\pi}}$.

s_n représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$, la verticale d'équation $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ et la courbe représentative de g.

s représente l'aire géométrique du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la verticale d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et la courbe représentative de g.

5. a. $x'_t = -(\cos t + \sin t)\ \mathrm{e}^{-t}$
et $y'_t = (\cos t - \sin t)\ \mathrm{e}^{-t}$.

On a : $x'_t = -(\cos t + \sin t)\ \mathrm{e}^{-t} = -\cos(t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$

et $y'_t = (\cos t - \sin t)\ \mathrm{e}^{-t} = -\sin(t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

$x'_t = \cos(\pi + t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} = \cos(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$ et

$y'_t = \sin(\pi + t - \dfrac{\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} = \sin(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Les zéro de x' sont $t_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ et $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Le zéro de y' est $t_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

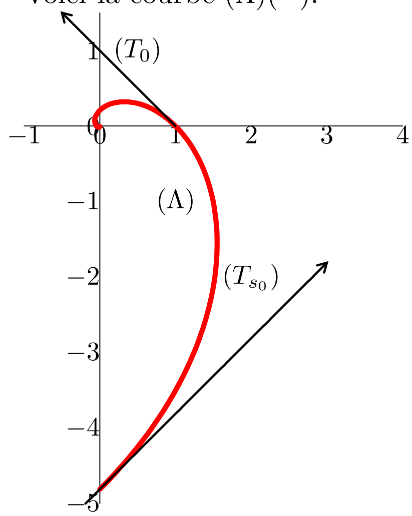
On détermine les signes de x' et y' par la méthode utilisée pour déterminer le signe de f'.

Voici le tableau de variations conjointes.

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
x'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	↗	r	↘	s	↘	t	↗	0
y	v	↗	$-r$	↗	s	↘	$-t$	↘	u
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

$r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ $\quad s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ $\quad t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$ $\quad u = -\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}$ $\quad v = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$

Voici la courbe (Λ)([1]).



La tangente (T_{s_0}) au point de paramètre $s_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ est la droite passant par le point de coordonnées $(0, -\mathrm{e}^{-s_0})$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(x'_{s_0}, y'_{s_0}) = (e^{-s_0}, e^{-s_0})$ ou $(1, 1)$.

La tangente (T_0) au point de paramètre 0 est la droite passant par le point de coordonnées $(1, 0)$ et dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(x'_0, y'_0) = (-1, 1)$.

b. Rapellons que θ étant un réel, le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et en désignant par M_θ le point de cordonnées $(\lambda \cos\theta, \lambda \sin\theta)$, $\lambda > 0$ alors θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_\theta})$.

On en déduit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_t}) \equiv t$.

$\overrightarrow{V}_t$ a pour coordonées $x'_t = \cos(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$ et $y'_t = \sin(t + \dfrac{3\pi}{4})\ \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_t}) \equiv t + \dfrac{3\pi}{4}$.

Puis $(\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{V_t}) = (\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_t}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}$.

[1]La courbe (Λ) est une spirale. Son équation polaire est : $r = \mathrm{e}^{-t}$