Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. Corrigé de l'épreuve n° 13 G 26 A 01. Année 2013

Exercice 1 :

1. (a) $r = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, $r = -0,973$. Il y a une forte corrélation.

   (b) La droite de régression de Y en X est :

   $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

   $y = -0,874x + 4,12$

   (c) Si $x = 6$ alors $y = -1,124$.
   Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6ième mois de pluie le degré de salinité ne peut être négatif.

2. Soit $Z = \ln(Y - 1)$

   (a)

x_i	0	1	2	3	4
z_i	1,182	0,875	0,010	-1,83	-4,61

   (b) $r = \dfrac{cov(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z}$, $r = -0,944$.

   (c) – La droite de régression de Z en X est :

   $z = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(X,Z)}{V(X)}$ et $b = \overline{Z} - a\overline{X}$

   $z = -1,428x + 1,982$

   – On a $z = \ln(y - 1)$ et $z = -1,428x + 1,982$ d'où

   $\ln(y - 1) = -1,428x + 1,982$

   $y - 1 = e^{-1,428x+1,982}$

   Ainsi $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$.

   (d) Si $x = 6$ alors $y = 1,001$. Le degré de salinité estimé au 6ième est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur. Donc l'équation $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$ nous permet de faire cette estimation.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
$S = S(O, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. $z' - z_O = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_O)$ or $z_O = 0$ donc
   $z' = i\frac{\sqrt{2}}{2} z$.

2. (a) $z_1 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_0 = i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $z_2 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
   $z_3 = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_2 = -i\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

   (b) $z_n = i\frac{\sqrt{2}}{2} z_{n-1}, n \geq 1$.

   (c) On voit que, d'après (b), $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomètrique de premier terme $z_0 = 1 + i$ et de raison $q = i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
   d'où $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n z_0$
   Ce qui donne $z_n = (i\frac{\sqrt{2}}{2})^n (1 + i), n \geq 0$.

   (d) $a_n = |z_n|, a_n = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$
   $a_{n+1} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$
   $a_{n+1} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \frac{\sqrt{2}}{2}$
   ainsi $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n, n \geq 0$.
   D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomètrique de premier terme $a_0 = \sqrt{2}$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   (e) (a_n) converge vers zéro car sa raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est dans $]0; 1[$.

Problème :

PARTIE A.

1. Soit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{x}{x}]$ or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$
   donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=1-1=0$
   En conclusion $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x}=0$.
2. $k :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
   $x\mapsto x(1-\ln x)$

   (a) $x\mapsto \ln x$ continue sur $]0;+\infty[$
   et $x\mapsto 1$ continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $]0;+\infty[$,
   d'où $x\mapsto (1-\ln x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ par somme.
   or $x\mapsto x$ est continue sur $]0;+\infty[$ d'où par produit $x\mapsto x(1-\ln x)$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   (b) $K :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
   $x\mapsto \dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x^2\ln x$
   $x\mapsto \dfrac{3}{4}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elles est dérivable sur $]0;+\infty[$
   et $x\mapsto \dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit,
   donc K est dérivable sur $]0;+\infty[$ par somme.
   <u>Calcul de $K^{'}(x)$</u> :
   $K^{'}(x)=(\dfrac{3}{4}x^2)^{'}-\dfrac{1}{2}(x^2\ln x)^{'}=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}(2x\ln x+x^2(\dfrac{1}{x}))$
   $=\dfrac{3}{2}x-x\ln x-\dfrac{1}{2}x=x-\ln x$
   d'où $K^{'}(x)=k(x)$.

PARTIE B.

$$Soit f(x)=\begin{cases} e^x-x-1, & \text{si } x\leq 0\\ x\ln x, & si\ \ x>0\end{cases} \tag{1}$$

1. si $x \leq 0$ alors $e^x - x - 1$ existe et si $x > 0$ alors $x \ln x$ existe d'où
   $f(x)$ existe ssi $x \in]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$
   $D_f =]-\infty; +\infty[$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} x \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

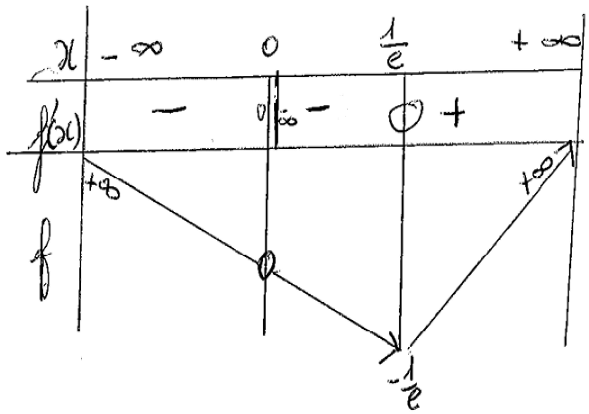
2. (a) f est définie en 0 car dans $[0; +\infty[$ $f(x) = e^x - x - 1$ et $x \mapsto e^x - x - 1$ est définie en 0 et prend la valeur 0 on a alors $f(0) = 0$.
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0,$
   d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$
   Ainsi f est continue en 0.

   (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - x - 1}{x} = 0$ d'après la partie A.
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
   Donc f n'est pas dérivable en 0 car ne l'étant pas en 0 à droite.
   Interprétation graphique : La courbe représentative de f, $(\mathcal{C}_f)$, admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x = 0$ à gauche et une demi-tangente d'équation $y = 0$ à droite.

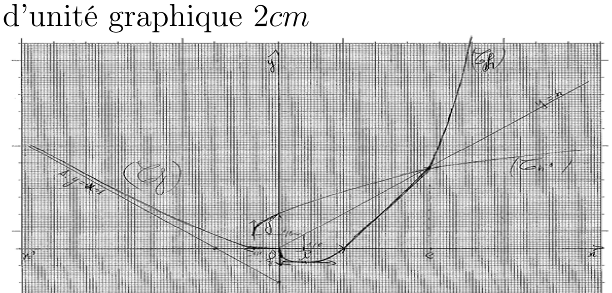
3. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; 0[$,
   $x \mapsto x \ln x$ continue sur $]0; +\infty[$ par produit
   et f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; 0[$,
   $x \mapsto x \ln x$ dérivable sur $]0; +\infty[$ par produit
   donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Pour $x < 0$, $f'(x) = e^x - 1$ or si $x < 0$ alors $e^x < 1$
   d'où $f'(x) < 0$ pour $x < 0$.
   Pour $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$ or $\ln x + 1 \geq 0$ si $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$ et $\ln x + 1 \leq 0$ si $x \in]0; \frac{1}{e}]$
   d'où $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]0; \frac{1}{e}]$.

5. Dressons son tableau de variations.



6. $f(x) - (-x-1) = e^x$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-x-1) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\Delta : y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction $(y'0y)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique $2cm$



9. Soit h la restriction de f à $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

(a) Dressons le tableau de variations de h.
□Tableaudevariation1E3.jpg
h est continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$, donc elle est bijective. Elle réalise une bijection de $[\frac{1}{e}; +\infty[$ vers $J = [-\frac{1}{e}; +\infty[$ d'après le tableau de variations de f.

(b) Pour la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1}, bijection réciproque de h, voir figure.

10. (a) Ce domaine est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ et $h(x) \leq y \leq x$. On a donc :
$\mathcal{A}_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x - h(x))dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x - x\ln x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} k(x)dx$
d'après la PARTIE A.
$\mathcal{A}_1 = [K(x)]_{\frac{1}{e}}^{e} = (K(e) - K(\frac{1}{e})) \times 4cm^2$
$\mathcal{A}_1 = (e^2 - \frac{5}{e^2})cm^2$

(b) Ce domaine est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du domaine d'aire $\mathcal{A}_1$ de la question 10)a) d'où $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 = (e^2 - \frac{5}{e^2})cm^2$.