UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis B01
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du $2^{\text{ème}}$ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit n est un entier naturel dont l'écriture dans la base d est $\overline{1121}$. On sait de plus que l'entier $4n$ s'écrit $\overline{4514}$ dans la base d.

1. Calculer $n-(d^3+d^2+2d)$. En déduire que n et d sont premiers entre eux. $2\times 0,75\ pt$

2. Démontrer que n et d s'écrivent respectivement 407 et 7 en base 10.
Quelle est l'écriture en base 7 du nombre qui s'écrit 704 en base 10? $1+1\ pts$

3. a. En utilisant la question 1) déterminer une solution particulière de l'équation

$$(E)\ : nx+dy=1,\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2.$$ $0,5\ pt$

b. Résoudre l'équation (E). $1\ pt$

Exercice 2 (5 *points*).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient une boule portant le numéro 0 ; 2^1 boules portant le numéro 1 ; 2^2 boules portant le numéro 2 ; 2^3 boules portant le numéro 3 ; 2^4 boules portant le numéro 4 ; 2^5 boules portant le numéro 5 et 2^6 boules portant le numéro 6. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Quel est le nombre total de boules dans l'urne ? $0,75\ pt$

2. On extrait au hasard une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de probabilité de X. $1,75\ pt$

3. a. Démontrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k=(n-1)2^{n+1}+2$. $1,25\ pt$

b. En déduire l'espérance mathématique $E(X)$ de X. $1,25\ pt$

Exercice 3 (5 *points*).

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, xf'(x)+f(x)=x\sin x.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=x\sin x$.

1. a. Soit $f\in\mathcal{F}$. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $H(x)=xf(x)$ est une primitive de h. $1\ pt$

b. Réciproquement, soit H une primitive de h. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{H(x)}{x}$ est un élément de $\mathcal{F}$. $1\ pt$

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'ensemble des primitives de h. $0,75\ pt$
b. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$. $0,75\ pt$

3. a. Pour quelle valeur du paramètre réel c la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x + c}{x}$ admet-elle une limite quand x tend vers 0? Déterminer alors cette limite. $0,75\ pt$
b. En déduire l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ ayant une limite finie quand x tend vers 0^+. $0,75\ pt$

Exercice 4 (5 *points*).

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(2,1,3),\ B(-2,0,8) \text{ et } C(3,2,4)$$

et la droite (Δ) ayant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. $0,5\ pt$
b. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C définissent un plan perpendiculaire à (Δ). $0,5 + 1\ pt$
c. Donner alors une équation cartésienne du plan (ABC). $1\ pt$

2. Soit H le point commun à la droite (Δ) et au plan (ABC).
a. Vérifier que le barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$ et $(C,-3)$ est égal à H. $1\ pt$
b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que

$$(3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AB} = 0.$$ $1\ pt$