13 G 26 B 01
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (08 points)

On considère la fonction f définie sur $[3\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x-2} - \sqrt{x-1}$.

1) Etudier f et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[3\ ;4]$. **(01 pt + 01 pt)**

2) Soit g la fonction définie sur $]3\ ;+\infty[$ par $g(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.
   a) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a même ensemble de solution que l'équation $g(x) = x$. **(02 points)**
   b) Montrer que pour tout $x \in [3\ ;+\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$. **(01 pt + 01 pt)**
   c) En déduire que pour tout $x \in [3\ ;+\infty[$, $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$. **(01 pt + 01 pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

On considère les nombres complexes z_n de la manière suivante :

$Z_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose :

$U_n = z_n - i$.

   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = 1 - i$. **(01 pt + 0,5 pt + 0,5 pt)**
   b) Exprimer U_n en fonction de n. **(01 pt)**

2) Calculer le module et un argument de U_n. **(0,25 pt + 0,75 pt)**

EXERCICE 3 (04 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1. **(0,5 pt + 01 pt)**

2) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $(n + 1)I_n + I_{n+1} = e$. **(01 pt)**
   b) En utilisant cette relation calculer I_5. **(1,5 pt = 0,25pt + 0,25pt + 0,25pt + 0,75pt)**

EXERCICE 4 (04 points)

1) Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle
   (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$. **(01 pt)**

2) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 3$. **(01 pt + 01 pt + 01 pt)**