UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

14 G 18 Bis A01
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Correction de l'exercice 1.

1. L'événement G : « Obtenir deux boules de même couleur » est réalisé si et seulement si on a soit deux boules noires (événement G_n), soit deux boules blanches (événement G_b), soit deux boules rouges (événement G_r).

Puisque ces trois événements sont incompatibles,

$$p(G) = p(G_n \cup G_b \cup G_r) = p(G_n) + p(G_b) + p(G_r) = \frac{C_n^2}{C_9^2} + \frac{C_b^2}{C_9^2} + \frac{C_r^2}{C_9^2}$$

c'est à dire $g(n,b,r) = \dfrac{C_n^2 + C_b^2 + C_r^2}{C_9^2} = \dfrac{n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)}{72}$

2. a. Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur $\overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{RN}$.

$$\overrightarrow{u} = (9\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j})(9\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{k}) = 81\overrightarrow{i} + 81\overrightarrow{j} + 81\overrightarrow{k}.$$

le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant non nul, les trois points N, B et R ne sont pas alignés ; ils déterminent donc un plan ayant ce vecteur pour vecteur normal ou tout autre vecteur non nul qui lui est colinéaire, par exemple, le vecteur $\overrightarrow{u}_0$ de coordonnées $(1,1,1)$.

On en déduit aussi que le plan (NBR) a pour équation cartésienne $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, d étant un réel à déterminer.

Pour connaître la valeur de d, il suffit d'exprimer que, par exemple, N appartient au plan (NBR); ce qui signifie que $9 + d = 0$ c'est à dire $d = -9$. On trouve donc que ce plan a pour équation $x + y + z - 9 = 0$

b. La somme de toutes les boules étant 9, on a $n + b + r = 9$; donc le point M appartient au plan (NBR).

c. Le point M ayant pour coordonnées (n,b,r), on a : $OM^2 = n^2 + b^2 + r^2$; donc

$$\begin{aligned} g(n,b,r) &= \frac{n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)}{72} \\ &= \frac{n^2 + b^2 + r^2 - n - b - r}{72} \\ &= \frac{OM^2 - n - b - r}{72} \\ &= \frac{OM^2 - 9}{72} \end{aligned}$$

d.

H est le projeté orthogonal de O sur le plan NBR signifie $\begin{cases} \overrightarrow{OH} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u_0} \\ H \text{ appartient au plan } (NBR) \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{u_0} \\ \text{Les coordonnées de } H \text{ vérifient l'équation du plan } (NBR) \end{cases}$

Ce qui est équivalent à $\begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} : H \text{ a pour coordonnées } (t,t,t) \\ t+t+t-9=0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Donc les coordonnées de } H \text{ sont } (3,3,3).}$

e. Pour que $g(n,b,r)$ soit minimale, il faut et il suffit que OM^2 le soit. OM doit donc être minimale ; c'est à dire M doit être égale à H ou $n=b=r=3$.

Dans ce cas $g(n,b,r) = \dfrac{OM^2-n-b-r}{72} = \dfrac{3^2+3^2+3^2-9}{72} = \dfrac{1}{4}$.

3. Ici $g(n,b,r) = 1/4$. La variable aléatoire X prend les valeurs -1000 (si les deux boules tirées ne sont pas de même couleur) et $k-1000$ (si les deux boules tirées sont de même couleur) avec les probabilités respectives $1-g(n,b,r) = 3/4$ et $g(n,b,r) = 1/4$.

Par conséquent $\boxed{E(x) = -1000\frac{3}{4} + (k-1000)\frac{1}{4} = \frac{k}{4} - 1000.}$ Pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que $E(X) = 0$ c'est à dire $\boxed{k = 4000}$

Correction de l'exercice 2.

1. a. Si $n=1$, la propriété est triviale. Supposons donc $n \geq 2$.

$$\begin{array}{rcll} a \wedge b^n = 1 & \Leftrightarrow & \exists u, v \in \mathbb{Z} : au + b^n v = 1 & \text{d'après Bezout} \\ & \Rightarrow & au + bv' = 1 & \text{avec } v' = b^{n-1}v \\ & \Rightarrow & a \wedge b = 1 & \end{array}$$

Réciproquement

$$\begin{array}{rcll} a \wedge b = 1 & \Leftrightarrow & \exists u, v \in \mathbb{Z} : au + bv = 1 & \text{d'après Bezout} \\ & \Leftrightarrow & \exists u, v \in \mathbb{Z} : bv = 1 - au & \\ & \Rightarrow & b^n v^n = (1-au)^n & \\ & \Leftrightarrow & b^n v^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p (-u)^p & \end{array}$$

Tous les termes de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p (-u)^p$ contiennent le facteur a sauf le premier (correspondant à $p=0$) qui vaut 1 ; donc cette somme s'écrit $1 + au'$, $u' \in \mathbb{Z}$ et

$$\begin{array}{rcll} a \wedge b = 1 & \Rightarrow & b^n v' = 1 + au' & \text{avec } v' = v^n \\ & \Leftrightarrow & -au' + b^n v' = 1 & \\ & \Rightarrow & a \wedge b^n = 1 & \text{d'après Bezout} \end{array}$$

b. Si a et b sont premiers entre eux, alors a est premier avec b^n, d'après le a.
Comme a divise le produit $b^n c$, il doit diviser c, d'après Gauss.

2. a. La fonction $f : x \mapsto 7x^3 + 2x^2 + 2x - 5$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 21x^2 + 4x + 2$.

La dérivée est un polynôme du second degré en x dont le discriminant réduit $2^2 - 42$ est strictement négatif ; la dérivé est alors strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, cette dernière égalité provenant du fait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution réelle unique.

$f(0)f(1) = -30 < 0$ donc la solution réelle de l'équation appartient à $]0,1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

b. Si p/q est solution de l'équation, on doit avoir $7\dfrac{p^3}{q^3}+2\dfrac{p^2}{q^2}+2\dfrac{p}{q}-5=0$ soit, en multipliant par q^3 :

$$7p^3+2p^2q+2pq^2-5q^3=0$$

Cette relation s'écrit

$$p(7p^2+2pq+2q^2)=5q^3$$

donc p divise $5q^3$ et d'après la question précédente, p divise 5.

Cette relation s'écrit aussi

$$7p^3=q(5q^2-2pq-2p^2)$$

donc q divise $7p^3$ et d'après la question précédente, q divise 7.

c. Une éventuelle solution rationnelle de l'équation étant positive, on peut considérer que p et q sont positifs ; alors, les seules valeurs possibles de p sont 1 et 5 et les seules valeurs possibles de q sont 1 et 7. Comme en plus la solution appartient à l'intervalle $]0,1[$, les seuls candidats solutions sont $1/7$ et $5/7$.

Un calcul direct montrer alors que $\boxed{\text{l'unique solution rationnelle de l'équation est } 5/7.}$

3. Ce qui précède montre que $7x-5$ est un facteur du polynôme $7x^3+2x^2+2x-5$.

En procédant par identification ou par division euclidienne, on obtient

$$7x^3+2x^2+2x-5=(7x-5)(x^2+x+1)$$

les autres solutions de l'équation sont donc celles de $x^2+x+1=0$.

Le discriminant de cette équation est $-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$.

$$\boxed{\text{Les solutions complexes de l'équation sont donc } 5/7,\ j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \overline{j}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$$

PROBLEME.

Partie A

1. a. $\forall x\in I,\ f_1(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{x}\Big[\ln t\Big]_1^x=\frac{\ln x}{x}$.

La fonction f_0 est définie, continue et dérivable sur I et de dérivée $f_0':x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, fonction strictement négative. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_0(x)=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto+0} f_0(x)=+\infty$. Voici le tableau de variations de f_0.

x	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$ ↘	0

La fonction f_1 est définie, continue et dérivable sur I et de dérivée $f_1':x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

la dérivée est ≥ 0 si et seulement si $\ln x\leq 1$ c'est à dire $x\leq \mathrm{e}$ et elle s'annule seulement si $x=\mathrm{e}$. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_1(x)=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} f_1(x)=-\infty$. Voici le tableau de variations de f_1.

x	0		e		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$1/\mathrm{e}$	↘	0

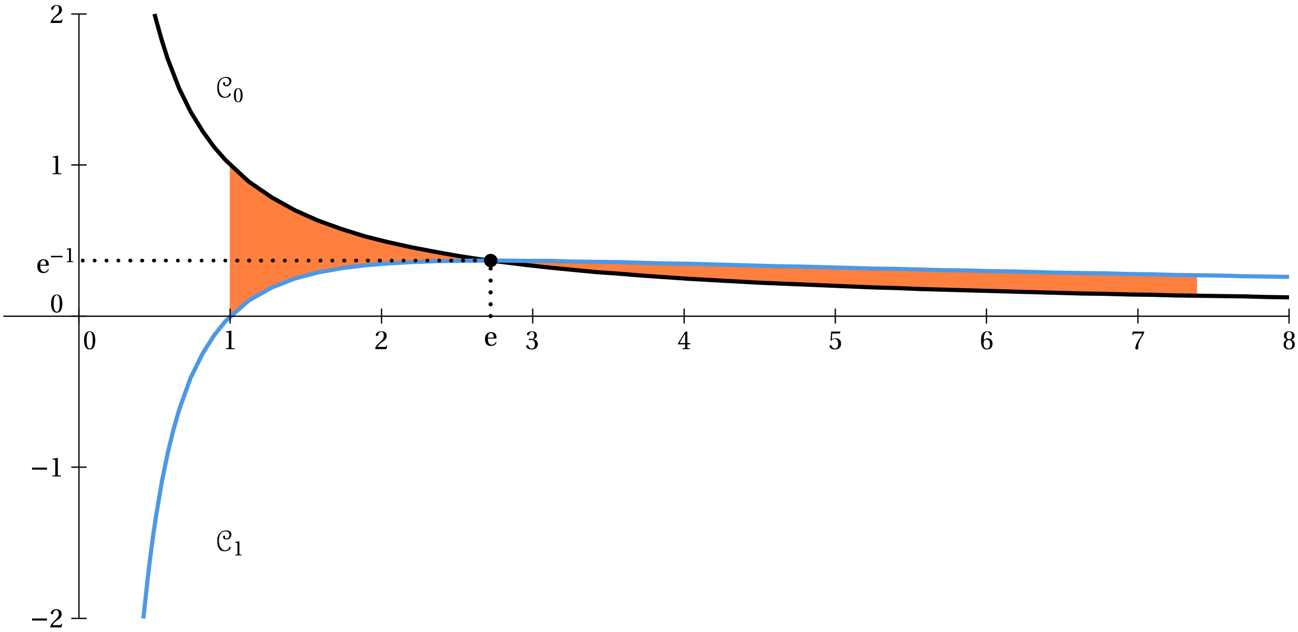
b.

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\quad f_1(x)-f_0(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \ln x - 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}\end{aligned}$$

et $f_1(x)-f_0(x)=0$ seulement si $x=\mathrm{e}$.

Donc dans l'intervalle $]0,\mathrm{e}[$, $\mathcal{C}_1$ est au dessous de $\mathcal{C}_0$ et dans l'intervalle $]\mathrm{e},+\infty[$, $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_0$.

Voici les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$.



2. L'aire demandée vaut en unités d'aire $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\left|f_1(x)-f_0(x)\right| = \int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

f_0 a pour primitives dans I, $x\mapsto \ln x + c^{\text{te}}$.

Pour tout $x\in I$, $f_1(x)=u'u$ avec $u=\ln x$.

Donc f_1 a pour primitives dans I, $x\mapsto \dfrac{1}{2}u^2+c^{\text{te}}=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+c^{\text{te}}$.

$$\boxed{\mathcal{A}=\left[\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}}+\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=1-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}4-2-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=1\text{ u.a }=4\text{ cm}^2}$$

Partie B

1. a. Appelons $\mathcal{P}_n$ la propriété « f_n est dérivable sur I. »

Nous savons déjà que f_0 est dérivable sur I ; $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier n donné, c'est à dire f_n est dérivable sur I.

Alors l'application $g: x\mapsto \displaystyle\int_1^x f_n(t)\,dt$ est dérivable sur I et de dérivé $g': x\mapsto f_n(x)$; par conséquent f_{n+1}, produit de f_0 et de g est dérivable sur I ; $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

b. D'après le a, Pour tout entier naturel n, f_{n+1} est dérivable sur I et

$$\boxed{\forall x\in I, f'_{n+1}(x)=f'_0(x)g(x)+f_0(x)g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(t)\,dt+\frac{1}{x}f_n(x)=-\frac{1}{x}f_{n+1}(x)+\frac{1}{x}f_n(x)}.$$

2. a. Soit x un élément de I.

En intégrant la relation de la question précédente, on obtient

$$\int_1^x f'_{n+1}(t)\,dx = \int_1^x \frac{-f_{n+1}(t)+f_n(t)}{t}\,dt$$

c'est à dire

$$f_{n+1}(x) - f_{n+1}(1) = -F_{n+1}(x) - F_n(x)$$

ou, puisque $f_{n+1}(1) = 0$

$$f_{n+1}(x) = -F_{n+1}(x) + F_n(x)$$

b. Soit p un entier naturel non nul et x un élément de I.
En sommant la relation précédente de 0 à $p-1$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{p-1} f_{n+1}(x) = \sum_{n=0}^{p-1}\Big(-F_{n+1}(x)+F_n(x)\Big) = -F_p(x) + F_0(x)$$

c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{p} f_n(x) = -F_p(x) + F_0(x)$$

ou, en ajoutant $f_0(x)$ aux deux membres

$$\sum_{n=0}^{p} f_n(x) = f_0(x) + F_0(x) - F_p(x)$$

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, appelons $\mathcal{Q}_n$ la propriété « $\forall x \in I, f_n(x) = \dfrac{\ln^n x}{n!x}$. »
Nous savons déjà que $\forall x \in I, f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $\mathcal{Q}_1$ est donc vraie.
Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie pour un entier non nul n donné, c'est à dire $\forall x \in I, f_n(x) = \dfrac{\ln^n x}{n!x}$.
Alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{\ln^n t}{n!t}\,dt$.
Mais pour tout t dans I, $\dfrac{\ln^n t}{n!t}$ s'écrit $\dfrac{1}{n!}v^n v'$ avec $v = \ln t$, l'application

$$t \mapsto \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}v^{n+1} = \frac{\ln^{n+1} t}{(n+1)!}$$

est donc une primitive

$$t \mapsto \frac{\ln^n t}{n!t}.$$

Par conséquent $\forall x \in I, f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{\ln^{n+1} t}{(n+1)!}\right]_1^x = \dfrac{\ln^{n+1} x}{(n+1)!x}$; $\mathcal{Q}_{n+1}$ est donc vraie.
b. Pour tout x dans $[1,\mathrm{e}]$, on a puisque la fonction ln est croissante : $0 \le \ln x \le 1$, donc

$$\forall x \in [1,\mathrm{e}], |f_n(x)| = \frac{\ln^n x}{n!x} \le \frac{1}{n!x} \le \frac{1}{n!}$$

On en déduit que

$$\Big|F_n(\mathrm{e})\Big| = \left|\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f_n(t)}{t}\,dt\right| \le \int_1^{\mathrm{e}} \frac{|f_n(t)|}{t}\,dt \le \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{n!t}\,dt = \frac{1}{n!}\Big[\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{n!}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n!} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(\mathrm{e}) = 0$.
c. De la question 2 , on tire en remplaçant x par e :

$$\sum_{n=0}^{p} f_n(\mathrm{e}) = f_0(\mathrm{e}) + F_0(\mathrm{e}) - F_p(\mathrm{e})$$

et en faisant tendre p vers $+\infty$

$$\lim_{p\mapsto+\infty}\sum_{n=0}^{p} f_n(\mathrm{e}) = f_0(\mathrm{e}) + F_0(\mathrm{e}) - \lim_{p\mapsto+\infty} F_p(\mathrm{e}) = f_0(\mathrm{e}) + F_0(\mathrm{e})$$

soit en remplaçant $f_n(\mathrm{e})$ par $\dfrac{\ln^n \mathrm{e}}{n!\mathrm{e}} = \dfrac{1}{n!\mathrm{e}}$ et sachant que

$$F_0(\mathrm{e}) = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f_0(t)}{t}\,dt = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t^2}\,dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} :$$

$$\lim_{p\mapsto+\infty}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1$$

Et en multipliant par e : $\boxed{\lim_{p\mapsto+\infty}\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}}$