

Epreuve du 2<sup>ème</sup> groupeM A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

**Exercice 1 (5 points).**

1. Calculer
- $C_5^3$
- ,
- $C_6^2$
- et
- $C_{10}^4$
- .

Montrer que la proposition :

 $\ll \forall n, p \in \mathbb{N}^* \text{ et } p < n, C_n^p \text{ est un multiple de } n. \gg$  est fausse. 3 × 0.25 + 0.75 ptsDans la suite,  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $0 < p < n$ .

2. Démontrer que si
- $n$
- et
- $p$
- sont premiers entre eux, alors
- $C_n^p$
- est un multiple de
- $n$
- . (On pourra utiliser la relation :
- $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$
- ).

Prouver que la réciproque est fausse. 1 + 0.5 pt

3. Démontrer que si
- $n$
- est premier, alors pour tout couple d'entiers
- $(a, b)$
- le nombre
- $(a + b)^n - (a^n + b^n)$
- est un multiple de
- $n$
- .
- 1.5 pt

**Exercice 2 (5 points).**Soit  $n$  un entier naturel. Pour tout réel  $x$  différent de  $k\frac{\pi}{2}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on note

$$f_n(x) = \tan x + \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} \text{ et on pose } I_n = \int_{\pi/6}^{\pi/3} f_n(t) dt.$$

1. a. Démontrer que, pour tout réel
- $x$
- différent de
- $k\frac{\pi}{2}$
- avec
- $k \in \mathbb{Z}$
- ,
- $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \tan x$
- .
- 1 pt

- b. En déduire que
- $f_n(x) = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{2^n} \frac{\cos(x/2^n)}{\sin(x/2^n)}$
- .
- 1 pt

2. Montrer que
- $I_n = \ln \left( 2 \cos \frac{\pi}{6 \times 2^n} \right)$
- .
- 2 pts

3. Calculer
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- .
- 1 pt

**Exercice 3 (5 points).**Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 1 cm. On considère la conique  $C$  d'équation :  $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$ .

1. Montrer que
- $C$
- est une hyperbole dont on déterminera le centre.
- 1.5 pt

2. Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de
- $C$
- . (foyers, sommets, directrices, excentricité, asymptotes).
- 2.5 pts

3. Tracer
- $C$
- .
- 1 pt

**Exercice 4 (5 points).**Soit  $f$  une isométrie plane laissant invariant un seul point  $A$ . Soit  $O$  un point distinct de  $A$  d'image  $O'$  par  $f$ . On note  $\Delta$  la médiatrice du segment  $[OO']$  et  $S_\Delta$  la réflexion d'axe  $\Delta$ .

- 
1. Déterminer  $f \circ S_{\Delta}(O')$  et  $f \circ S_{\Delta}(A)$ . 2 × 1 pts
  2. Démontrer que  $f \circ S_{\Delta}$  n'est pas l'application identique du plan. 1 pt
  3. **a.** Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de  $f \circ S_{\Delta}$ . 1 pt  
**b.** En déduire la nature de  $f$ . 1 pt