UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 18 Bis A18
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRIGE

Exercice 1.

1. $p(M) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{700}{1500} = \dfrac{7}{15}$.

2. a. $p(S) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$ et $p(S/M) = \dfrac{28}{100} = \dfrac{7}{25}$.

b. $p(S \cap M) = p(S/M) \times p(M) = \dfrac{7}{15} \times \dfrac{7}{25} = \dfrac{49}{375}$.

c. $p(M/S) = \dfrac{p(S \cap M)}{p(S)} = \dfrac{49}{375} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{49}{150}$.

3. Si S_i est l'événement « Babou écoute i chansons Sérère en fin de journée » alors $p(S_i) = C_5^i\left(\dfrac{2}{5}\right)^i\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5-i}$ et la probabilité d'écouter au moins 3 chansons Sérère en fin de journée est :

$$\begin{aligned} p(S_3) + p(S_4) + p(S_5) &= C_5^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^0 \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{18}{5} + \frac{6}{5} + \frac{2}{25}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{124}{25}\right) \end{aligned}$$

Donc Babou a $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\left(\dfrac{124}{25}\right) \times 100\%$ d'écouter au moins 3 chansons Sérère en fin de journée et Bachir a bien raison.

Exercice 2.

1. $A' = f(A)$ a pour affixe $z_{A'} = e^{i|z_A|}z_A = e^{i\pi}\pi = -\pi = -z_A$.
$B' = f(B)$ a pour affixe $z_{B'} = e^{i|z_B|}z_B = e^{2i\pi}2\pi = 2\pi = z_B$.

2. Le point O est invariant par f. Un point M distinct de O, d'affixe z est invariant par f si et seulement si $e^{i|z|}z = z$ et $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} & e^{i|z|}z &= z \\ \Leftrightarrow\ & e^{i|z|} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ & |z| &= 2k\pi, k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow\ & OM &= 2k\pi, k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

E est donc l'ensemble des cercles de centre O et de rayon $2k\pi, k \in \mathbb{N}$.

3. L'affixe z_C de C est $2\mathrm{e}^{i\pi/3}$. Un point M d'affixe z appartient à (Δ) si et seulement si z et z_C ont même argument c'est à dire si et seulement si $z = a\mathrm{e}^{i\pi/3}, a$ avec a réel > 0

Un point $M(z)$ de (Δ) et son image $M'(z')$ sont symétriques par rapport à $(O, \overrightarrow{u})$ si et seulement si $z' = \overline{z}$.

$$\begin{array}{lll} \overline{z} & = & \mathrm{e}^{i|z|}z \\ \Leftrightarrow \quad a\mathrm{e}^{-i\pi/3} & = & a\mathrm{e}^{i|z|}\mathrm{e}^{i\pi/3} \text{ (On pourrait remplacer } |z| \text{ par } a \text{)} \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2i\pi/3} & = & \mathrm{e}^{i|z|} \\ \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^*, |z| & = & -2\pi/3 + 2k\pi \end{array}$$

4. a. $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}(O, 2k\pi)$.

$a_k = \pi\left[2(k+1)\pi\right]^2 - \pi(2k\pi)^2 = \pi^3(8k+4)$.

b. La suite (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_1 = 12\pi^3$ et de raison $8\pi^3$.

c. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} a_n = +\infty$.

5. a. $M(z)$ appartient à (Δ) et est symétrique avec son image par rapport $(O, \overrightarrow{u})$ si et seulement s'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z| = -2\pi/3 + 2k'\pi$. Donc un point $M(z)$ appartient à $(\Delta) \cap \mathcal{D}_k$ et est symétrique avec son image par rapport $(O, \overrightarrow{u})$ si et seulement s'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que :

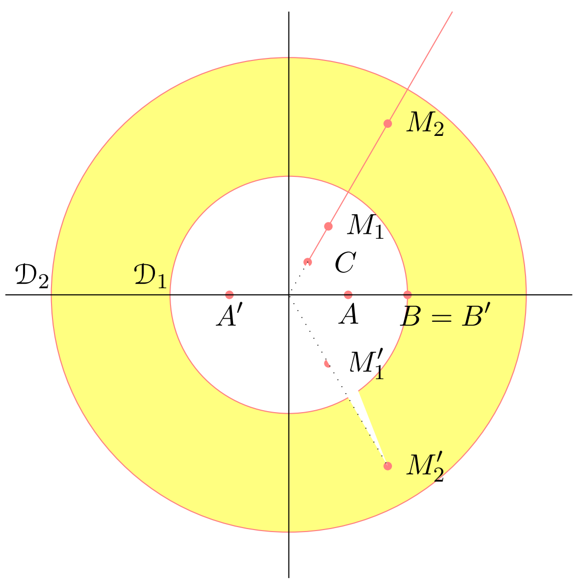
$$\begin{cases} |z| = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \\ 2k\pi \leq |z| \leq 2(k+1)\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \\ 2k\pi \leq -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \leq 2(k+1)\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \\ k + \dfrac{1}{3} \leq k' \leq k + 1 + \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \\ k' = k+1 \end{cases}. \text{ Donc } z = 2\pi\left(k + \dfrac{2}{3}\right)\mathrm{e}^{i\pi/3}.$$

b. Soit $M(z)$ un point de $\mathcal{D}_k$ et $M'(z')$ son image par f.

Alors $|z'| = |z|$ puisque $z' = \mathrm{e}^{i|z|}z$.

Donc si $|z|$ est compris entre $2k\pi$ et $2(k+1)\pi$, il en est de même de $|z'|$. Autrement dit si M appartient à $\mathcal{D}_k$, son image appartient à $\mathcal{D}_k$.



PROBLEME. Partie A

1. Résolution l'équation différentielle $y'+y=0.$

- On peut énoncer directement le résultat car cela a été fait en cours : la solution générale de l'équation différentielle est $y=ke^{-x}, k$ appartenant à $\mathbb{R}$.

- On peut dire que l'on a une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r+1=0$. La solution de cette équation caractéristique est $r_0=-1$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est $y=ke^{r_0 x}, k$ appartenant à $\mathbb{R}$.

- On peut faire un calcul direct. La fonction nulle est solution de l'équation différentielle.

Une solution qui ne s'annule pas en un point donné, ne s'annulera pas dans un intervalle ouvert contenant ce point. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle gardera un signe constant dans cet intervalle.

Dans cet intervalle, l'équation différentielle est alors équivalente à $\dfrac{y'}{y}=-1$ soit $\ln|y|=-x+c, c$ constante réelle. On a donc $|y|=e^c e^{-x}$ puis $y=ke^{-x}$ avec $k=e^c$ ou $-e^c$ selon le signe de y.

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle est $y=ke^{-x}, k$ appartenant à $\mathbb{R}$.

2. a. g, produit des deux applications dérivables sur $\mathbb{R}_+^*, x\to\varphi(x)$ et $\exp\ : x\to e^x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'=\varphi'\exp+\varphi\exp'$; c'est à dire $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x)=(\varphi'(x)+\varphi(x))e^x$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi \text{ vérifie (1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x)+\varphi(x)=-\frac{1}{x}-\ln x\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x)=\left(-\frac{1}{x}+-\ln x\right)e^x\\ &\Leftrightarrow \quad g \text{ est une primitive de } x\to-\frac{e^x}{x}-e^x\ln x\end{aligned}$$

b. On peut remarquer que $h\ : x\to-\dfrac{e^x}{x}-e^x\ln x$ est la dérivée de $H\ : x\to -e^x\ln x$.

Sinon, on peut faire un calcul direct. On a pour tout réel $x>0$:

$$\int_1^x h(t)\,dt=-\int_1^x\left(\frac{e^t}{t}+e^t\ln t\right)\,dt$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_1^x\frac{e^t}{t}\ dt=\int_1^x e^t\ln' t\ dt=\left[e^t\ln t\right]_1^x-\int_1^x \exp{}'(t)\ln t\ dt=e^x\ln x-\int_1^x e^t\ln t\ dt$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^x h(t)\,dt=-e^x\ln x=H(x)$ et l'ensemble des primitives de la fonction $h\ : x\mapsto -e^x\ln x-\dfrac{e^x}{x}$ est $\{H+a,\ a\in\mathbb{R}\}$.

3. D'après la question précédente, pour qu'une application φ vérifie (1) il faut et il suffit que l'application g soit une primitive de h.

g est donc de la forme $H+a, a\in\mathbb{R}$, autrement dit

$$\varphi(x)=g(x)e^{-x}=(H(x)+a)e^{-x}=-\ln x+ae^{-x}$$

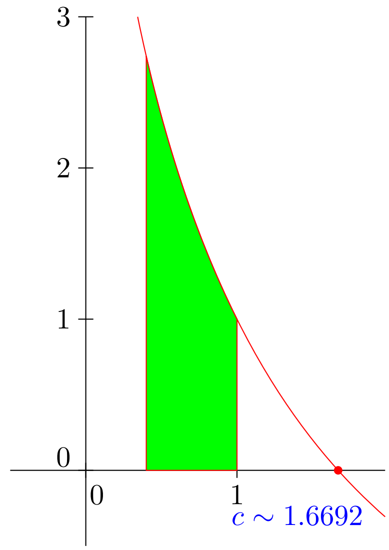
L'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x\mapsto ae^{-x}-\ln x$ où a désigne une constante réelle.

Partie B (5.25 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=e^{1-x}-\ln x$.

1. Remarquons d'abord que f est une solution de l'équation différentielle (1) avec $a=e$.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -e^{1-x} - \dfrac{1}{x}$. La dérivée est strictement négative ; f est donc strictement décroissante. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Voici le graphe de f.



f est continue et strictement décroissante et comme $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c dans $\mathbb{R}_+^*$.
$f(1) = 1 > 0$ est $f(2) = e^{-1} - \ln 2 < 0$, donc $c \in]1, 2[$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, xf(x) = xe^{1-x} - x \ln x$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} xf(x) = 0$

c. $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt = \left[-e^{1-t}\right]_x^1 - \int_x^1 \ln t\, dt = e^{1-x} - 1 - \int_x^1 \ln t\, dt$
Si on pose $u(t) = t$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_x^1 \ln t\ dt &= \int_x^1 \ln t\ u'(t)\ dt &&= [u(t)\ \ \ln t]_x^1 - \int_x^1 \ln'(t)\ u(t)\ dt \\ &= -x \ln x - \int_x^1 1\ dt &&= -x \ln x + x - 1\end{aligned}$$

Finalement $F(x) = e^{1-x} + x \ln x - x$.
De $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ on tire $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} F(x) = e$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\dfrac{k}{n} \leq t \leq \dfrac{k+1}{n}$, on a : $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Cela vient simplement du fait que f est strictement décroissante.

b. En intégrant la relation précédente dans l'intervalle $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ dont la longueur est $\dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ensuite on somme de $k=1$ à $k=n-1$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Dans le premier membre de l'inégalité, on change la numérotation (on remplace $k+1$ par k), dans le second membre, on utilise la relation de Chasles

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est à dire, en posant $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$:

$$w_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq w_n - \frac{1}{n}f(1)$$

Ce qui permet d'encadrer w_n :

$$F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq w_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. a. On déduit des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = e$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Alors l'encadrement de w_n et le théorème des gendarmes entrainent que la suite (w_n) est convergente et de limite e.

b. Posons $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1-k/n}$

$\sum_{k=1}^{n} e^{-k/n} = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-1/n}\right)^k$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $e^{-1/n}$ et de raison $e^{-1/n}$.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-1/n}\right)^k = e^{-1/n}\frac{\left(e^{-1/n}\right)^n - 1}{e^{-1/n}-1} = \frac{e^{-1}-1}{1-e^{1/n}}$$

$$\text{et } t_n = \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-k/n} = (e-1)\frac{1}{n(e^{1/n}-1)}.$$

$$\text{Ensuite } \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\frac{1}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n} = \ln\left(\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

$$\text{et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

c. On a $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{1-k/n} - \ln\frac{k}{n}\right) = t_n - u_n$. Autrement dit $u_n = t_n - w_n$

On sait que $\lim\limits_{s\to 0}\frac{e^s-1}{s} = 1$. Par conséquent, en prenant $s = \frac{1}{n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n(e^{1/n}-1)} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = e-1$

La suite (u_n), somme de deux suites convergentes de limites respectives $e-1$ et $-e$, est convergente et de limite $e-1-e=-1$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$$

On a $u_n = \ln\left(\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}\right) = -\ln v_n$ autrement dit $v_n = e^{-u_n}$. La suite (v_n) est donc convergente et de limite e^1

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = e$$

Partie C

1. a. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = e^{1-x} + \dfrac{1}{x^2}$. f'' est strictement positive ; f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc aussi sur $[1,2]$. $f'(1) = -2$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2}$.

La fonction P est dérivable sur $[1,2]$ et

$$\forall x \in [1,2], P'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(1)} = \frac{f'(1)-f'(x)}{f'(1)}.$$

Puisque f' est strictement croissante, $f'(1)-f'(x)$ est <0 ; comme $f'(1) = -2$ est aussi <0, la dérivée P' est donc strictement positive ; P est alors strictement croissante sur $[1,2]$. $P(1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(c) = c$. Voici le tableau de variation de P dans $[1,c]$.

x	1		c
$P'(x)$		$+$	
$P(x)$	$1/2$	$\nearrow$	c

Ainsi, P réalise une bijection de $[1,c]$ sur l' intervalle $J = [1/2, c]$ contenu dans $[1,c]$.

Montrons alors par récurrence que la suite (c_n) est bien définie et est contenue dans l'intervalle $[1,c]$.

$c_0 = 1$ existe et appartient à $[1,c]$. Supposons que pour un entier n donné, c_n existe et appartient à $[1,c]$. Alors $c_{n+1} = P(c_n)$ existe aussi et appartient à $P([1,c]) = J \subset [1,c]$.

2. a. La fonction P' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P''(x) = -\dfrac{f''(x)}{f'(1)} > 0$. P' est donc strictement croissante.

Alors, pour tout $x \in [1,2]$, on a

$$0 \le P'(x) \le P'(2) = 1 - \frac{f'(2)}{f'(1)} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right) \le 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$$

b. En appliquant le théorème des accroissements finis à P dans l'intervalle $[c_n, c]$, on peut affirmer l'existence d'un élément θ dans $]c_n, c[$ tel que

$P(c) - P(c_n) = P'(\theta)(c - c_n)$ c'est dire $c - c_{n+1} = P'(\theta)(c - c_n)$.

Ce qui entraine $|c_{n+1} - c| = |P'(\theta)||c_n - c| \le \dfrac{7}{12}|c_n - c|$.

Cette relation entraine ensuite $0 \le |c_n - c| \le \left(\dfrac{7}{12}\right)^n |c_0 - c|$. Comme le dernier membre a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, par le théorème des gendarmes, le membre $|c_n - c|$ a aussi pour limite 0. Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$.

c. Pour que c_n soit une valeur approchée de c à 10^{-2} il suffit de choisir n tel que $\left(\dfrac{7}{12}\right)^n |c_0 - c| \leq 10^{-2}$.

Comme $|c_0 - c| < 1$, il suffit que $\left(\dfrac{7}{12}\right)^n \leq 10^{-2}$ c'est à dire $n \ln \dfrac{7}{12} \leq -2 \ln 10$ ou encore $n \geq 2\dfrac{\ln 10}{\ln 12 - \ln 7}$. On peut donc prendre $n = E(r) + 1$ avec $r = 2\dfrac{\ln 10}{\ln 12 - \ln 7}$ c'est à dire $n = 9$.