CORRIGE

EXERCICE 1

1) a) $si\ x < -1$ alors $F(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0.$

$si\ x \geq 3$ alors $F(x) = 1$; $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$

b) Soit U l'ensemble des valeurs possibles de X

$U = \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$

si $-1 \leq x < 0$; $F(x) = p(X = -1) = \frac{1}{9} \Rightarrow \boldsymbol{p(X = -1) = \frac{1}{9}}$.

si $0 \leq x < 1$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) = \frac{3}{9}$.

$\Rightarrow \frac{1}{9} + p(X = 0) = \frac{3}{9} \Rightarrow p(X = 0) = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} \Rightarrow \boldsymbol{p(X = 0) = \frac{2}{9}}$

si $1 \leq x < 2$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{6}{9}$

$\Rightarrow \frac{3}{9} + p(X = 1) = \frac{6}{9} \Rightarrow p(X = 1) = \frac{6}{9} - \frac{3}{9} \Rightarrow \boldsymbol{p(X = 1) = \frac{3}{9}}$

si $2 \leq x < 3$; $F(x) = p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \frac{6}{9} + P(x = 2) = \frac{8}{9} \Rightarrow P(x = 2) = \frac{8}{9} - \frac{6}{9} \Rightarrow \boldsymbol{P(x = 2) = \frac{2}{9}}.$

si $x \geq 3$, $F(x) = p(X - 1) + p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$

$\Rightarrow \frac{8}{9} + p(X = 3 = 1 \Rightarrow p(X = 3) = 1 - \frac{8}{9} \Rightarrow \boldsymbol{p(X = 3) = \frac{1}{9}}.$

x	-1	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

c) $p(X \leq 0) = p(X = -1) + p(X = 0) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$

$p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}.$

d) $E(X) = -1\,p(X = -1) + 0\,p(X = 0) + 1\,p(X = 1) + 2\,p(X = 2) + 3\,p(X = 3)$

$E(X) = -(1 \times \frac{1}{9}) + (0 \times \frac{2}{9}) + (1 \times \frac{3}{9}) + (2 \times \frac{2}{9}) + (3 \times \frac{1}{9}) = -\frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9}$

$$\boldsymbol{E(X) = 1}.$$

e) $\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$; $v(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$v(X) = [(-1)^2 p(X = -1) + 0^2 p(X = 0) + 1^2 p(X = 1) + 2^2 p(X = 2) + 3^2 p(X = 3)] - 1$

$= [(1 \times \frac{1}{9}) + (0 \times \frac{2}{9}) + (1 \times \frac{3}{9}) + (4 \times \frac{2}{9}) + (9 \times \frac{1}{9})] - 1 = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{9} - 1.$

$v(X) = \frac{21}{9} - 1.$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

2) a)

$U_1 \backslash U_2$	-2	-1	0
1	-1	0	1
2	0	1	2
3	1	2	3

b) Soit V l'ensemble des valeurs possibles de Y.

$V = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$p(Y = -1) = \frac{1}{9}$; $p(Y = 0) = \frac{2}{9}$; $p(Y = 1) = \frac{3}{9}$; $p(Y = 2) = \frac{2}{9}$; $p(Y = 3) = \frac{1}{9}$.

x	-1	0	1	2	3
$P(Y=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y et X ont la même loi de probabilité.

EXERCICE 2

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \frac{2}{4} + i - \frac{2}{4} = i\cdot$

$z^2 - i = 0 \Leftrightarrow z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

2) a) α est une solution de l'équation $p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) = 0$.

$\Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha^2 - i\alpha - i = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 + i(-\alpha - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha^2 + 0$ ①

$-\alpha - 1 = 0$ ②

② $\Leftrightarrow \alpha = -1\ ;\ (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0.$

donc $\alpha = -1$.

b) Comme -1 est une racine de p, donc il existe un polynôme g tel que $p(z) = (z+1)g(z)$.

	1	1	$-i$	$-i$
-1		-1	0	i
	1	0	$-i$	0

$g(z) = z^2 - i$.

Les solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont : -1 et les racines de g.

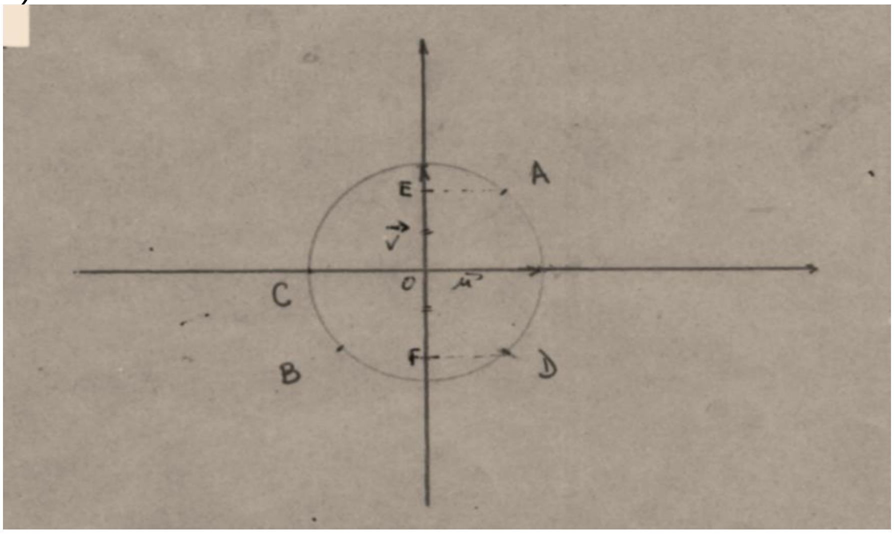
$g(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$S = \left\{-1\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$$

3) a) $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

b)



4) a) $z_D = \bar{z}_A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

b) $z_D - z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \frac{\sqrt{2}+2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

$z_A - z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$

$$\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i}{\frac{\sqrt{2}+2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i} = \frac{\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\left[\left(\sqrt{2}+2\right)-i\sqrt{2}\right]^2}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}+2\right) i\sqrt{2} - 2}{2+4\sqrt{2}+4+2}$$

$$= \frac{2+4\sqrt{2}+4-4\,i-4\,i\sqrt{2}-2}{8+4\sqrt{2}} = \frac{4+4\sqrt{2}-\left(4+4\sqrt{2}\right) i}{8+4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\right| \Rightarrow \frac{|z_D - z_C|}{|z_A - z_C|} = 1 \Rightarrow \frac{CD}{CA} = 1 \Rightarrow CD = CA$$

$\Rightarrow ACD$ est isocèle de sommet principal C.

5) a) Soit P le plan

$$S : P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z')$$
$$z' = az + b$$

$$S(E) = A \Leftrightarrow z_A = a\,z_E + b \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = a \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + b$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i + 2\,b$$
$$S(F) = B \Leftrightarrow z_B = a\,z_F + b$$

F est le symétrique de E par rapport $O \Leftrightarrow \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF} \Leftrightarrow Z_O - Z_E = Z_F - Z_O$

$\Leftrightarrow -Z_E = Z_F \Leftrightarrow Z_F = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, i.$

$Z_B = a\,Z_F + b \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -a \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, i + b$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\,(1+i) = -a\sqrt{2}\, i + 2b$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i + 2b & (1) \\ -\sqrt{2}\,(1+i) = -a\sqrt{2}\, i + 2\,b & (2) \end{cases}$$

$0 = 4b$

$b = 0$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(1+i) = a\sqrt{2}\, i \Leftrightarrow 1 + i = a\, i \Leftrightarrow a = \frac{1+i}{i}$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{i} + 1 \Leftrightarrow a = 1 - i$

$a = 1 - i$ *et* $b = 0.$

D'où $z' = (1 - i)z.$

$1 - i \neq 1$, donc S est la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

$Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-a} = 0 = Z_0 \implies \Omega = O.$
$k = |a| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$\theta = \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\ ;\ \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\cdot$

S est la similitude de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b) ($\mathscr{C}$') est le cercle de centre $S(E)$ et de rayon $1 \times \sqrt{2}\cdot$
$S(E) = A$; $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot$
(C') est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

PROBLEME

PARTIE A

1) L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 4r + 4 = 0$.
$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Leftrightarrow r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2.$
$h(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2) a) $\varphi(x) = ax + b$; $\varphi'(x) = a$; $\varphi''(x) = 0$.
φ est solution de $(F) \Leftrightarrow \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x) = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4a + 4ax + 4b = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ 4a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

$a = -1$ et $b = 1$.

b) f est solution de $(F) \Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = -4x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f''(x) - \varphi''(x) + 4f'(x) - 4\varphi'(x) + 4f(x) - 4\varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
$(f - \varphi)''(x) + 4(f - \varphi)'(x) + 4(f - \varphi)(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow f - \varphi$ est solution de (E).

c) f est solution de $(F) \Leftrightarrow f - \varphi$ est solution de (E).

$\Leftrightarrow (f - \varphi)(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) - \varphi(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} + \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (F) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

d) $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow (\lambda(0) + \mu)\, e^{-2(0)} - 0 + 1 = 2 \Leftrightarrow \mu + 1 = 2 \Leftrightarrow \mu = 1$
$f'(x) = \lambda e^{-2x} - 2(\lambda x + \mu)e^{-2x} - 1$
$f'(0) = -2 \Leftrightarrow \lambda - 2\mu - 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda - 2(1) - 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda - 3 = -2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
$\lambda = 1$ et $\mu = 1$; d'où $f(x) = (x + 1)e^{-2x} - x + 1$.

PARTIE B

1) a) Soit $x \in [0, +\infty[$.
$f'(x) = e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} - 1 = -e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} - 1$
$f''(x) = 2\, e^{-2x} - 2\, [e^{-2x} - 2x\, e^{-2x}] = 2\, e^{-2x} - 2\, e^{-2x} + 4x\, e^{-2x} = 4x\, e^{-2x}$.

b) ∀ x ∈ [0, +∞[, f''(x) = 4x e^{-2x}.

∀ x ∈ [0, +∞[, e^{-2x} > 0, donc f''(x) est du signe de x, donc f''(x) ≥ 0.

f'(0) = - 2 ;

f'(x) = - e^{-2x} - $\frac{2x}{e2x} - 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -1$

x	0		+∞
f''(x)	0	+	
f'	-2	↗	-1

c) ∀ x ∈ [0, +∞[, f'(x) ∈ [-2, -1[⇒ f'(x) < 0

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x+1}{x} = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

∀ x < -1, $f'(x) = \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{(x-x-1)x}{x^2(x+1)} = \frac{x-x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)}$.

∀ x < −1, x(x+1) > 0 ⇒ f'(x) < 0.

x	-∞		-1
f'(x)		-	
f	0	↘	-∞

3) f(0) = 2 ; ∀ x ∈ [0, +∞[, f(x) = x $\left(e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\leftarrow+\infty} \frac{1}{x} = 0$

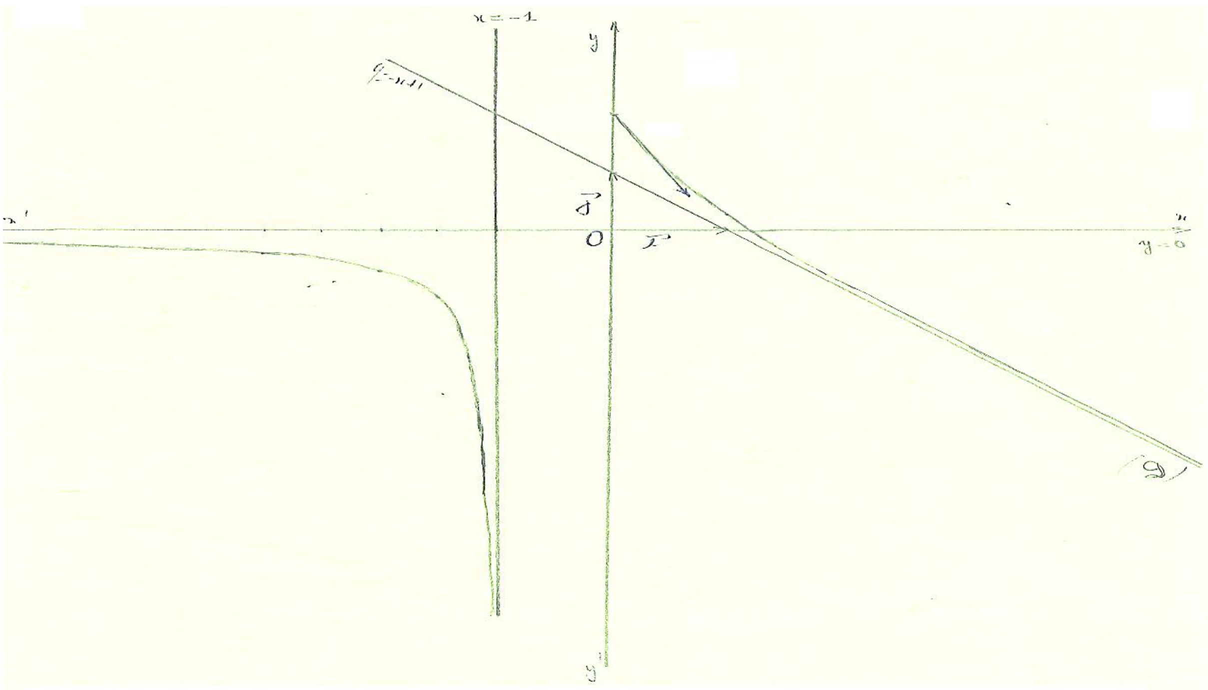
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} - 1 + \frac{1}{x} = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		-2	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||	2		$\searrow$	$-\infty$

4) $f(\,]-\infty,-1[\,) =]-\infty,0[$, donc $\forall x \in]-\infty,-1[, f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.
f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, donc f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f(\,[0,+\infty[\,) =]-\infty, 2]$. Or $0 \in]-\infty, 2]$, donc il existe un unique $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
En conséquence l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
$f(1) = e^{-2} + e^{-2} - 1 + 1 = 2\,e^{-2}$; $f(2) = 2\,e^{-4} + e^{-4} - 2 + 1 = 3\,e^{-4} - 1$.
$$f(1) > 0, f(2) < 0 \; ; \; f(1)\,f(2) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2 \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq 2.$$

5) $\forall x \geq 0, f(x) = x\,e^{-2x} + e^{-2x} - x + 1$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-2x} + e^{-2x} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
$f(x) - (-x+1) = x\,e^{-2x} + e^{-2x} = e^{-2x}(x+1)$
$\forall x \geq 0$, $e^{-2x} > 0$ et $x + 1 > 0$, donc
$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) - (x + 1) > 0 \Rightarrow (\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D).

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$.



$f'(0) = -2$; $f(1) = e^{-2} + e^{-2} = 2\,e^{-2} \simeq 0{,}27$; $f(-2) = -\ln 2 \simeq -0{,}69$
$f(-1{,}5) = -\ln 3 \simeq -1{,}1$; $f(-3) = \ln\frac{2}{3} \simeq -0{,}41$.