UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01-19 G 18 Bis B-20
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 points).

Un dé à jouer parfaitement équilibré a 6 faces numérotées $1, 1, 2, 2, 3, 3$.

On lance deux fois de suite le dé et on note a le résultat du premier lancer et b celui du deuxième lancer.

Soit A l'événement « La somme $a+b$ est égal à 4. » et B l'événement « Le produit ab est égale à 4. »

1. Calculer $p(A), p(B)$ et $p(A/\overline{B})$. $2 \times 0.75 + 1.25$ **pt**

2. On lance n fois de suite ($n \geq 2$) ce dé. On note A_n l'événement « obtenir exactement deux fois une somme égale à 4. » et B_n l'événement « obtenir au moins une fois une somme égale à 4. »

a. Montrer que $p(A_n) = \frac{1}{8}n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **1 pt**

b. Calculer $p(B_n)$. En déduire le nombre minimal de lancers qu'il faut effectuer pour que $p(B_n) \geq 0.99$. $1 + 0.25$ **pt**

Exercice 2 (5 points).

On considère un carré de sens direct $ABCD$ de centre I. Soient J, Ket L les milieux respectifs des segments $[AB], [CD]$ et $[DA]$. $\mathcal{C}_1$ désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et $\mathcal{C}_2$ désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s qui transforme A en I et B en K. 2×0.5 **pt**

2. Montrer que le centre Ω de la similitude s est le point d'intersection autre que J des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. **1 pt**

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC).
En déduire l'image du point C par s. 3×0.5 **pt**

b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$. 0.75 **pt**

4. Démontrer A, Ω et E sont alignés.
On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$. 0.75 **pt**

Exercice 3 (5 points). Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (C) de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. a. Comparer les positions de $M(t)$ et $M(t+2\pi)$. 0.75 **pt**

b. Comparer les positions de $M(t)$ et $M(-t)$. **0.75 pt**

c. Comparer les positions de $M(t)$ et $M(\pi - t)$. **0.75 pt**

2. Etudier les variations de x et de y sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. **1.75 pt**

3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
On admettra qu'au point $S(2, 0)$ la tangente est horizontale. **1 pt**

Exercice 4 (5 *points*).

Soit f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

1. a. On pose pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g(x) = f(\cos x)$.
Montrer que la fonction g est dérivable et que sa dérivée est une constante. **1 pt**

b. Montrer alors que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], g(x) = \frac{2}{\pi}x$. Calculer alors $f(1)$. **0.75 + 0.5 pt**

c. Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à $[0, 1]$. **0.5 + 0.75 pt**

2. On pose pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$. **0.5 + 0.5 pt**

b. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], h(x) = 1$. **0.5 pt**