UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❒❒◆❒❒
OFFICE DU BACCALAUREAT
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 33 824 95 92 - 33 824 65 81

10T 37 A R
Durée : 4 heures
Série : G – Coef. 5

Epreuve du 1 er groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE I (04 points)

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de A. **(0,5 pt)**

2) Calculer la matrice inverse A^{-1} de A par la méthode du pivot de Gauss. **(1,5 pt)**

3) Montrer que $A^3 - 7A^2 + 4A - I = O$, où O est la matrice nulle. **(01 pt)**
En déduire une expression de la matrice A^{-1} de la 2ème question en fonction de A. **(01 pt)**

EXERCICE II (03 points)

Soit (U_n) la suite définie par $U_o = \frac{4}{e}$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}$ pour tout n $\in IN$.

On pose $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{4}\right)$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 pt)**

2) Calculer V_n puis U_n en fonction de n. **(01 pt)**

3) Etudier la convergence de la suite (U_n). **(01 pt)**

EXERCICE III (03 points)

Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher ; 8 sont blanches et numérotées de 1 à 8, les autres 7 boules sont noires et numérotées de 1 à 7.

On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A « deux boules et deux boules seulement parmi les trois boules tirées sont noires » ;**(0,5 pt)**

B « une boule au plus parmi les trois boules tirées est blanche » **(01 pt)**

C «les trois numéros sont pairs » ; **(0,5 pt)**

D «un numéro au moins parmi les trois boules tirées est impair ». **(01 pt)**

PROBLEME **(10 points)**

Partie A

Soit la fonction h définie par h(x) = 1 – x - e^x.

1) Etudier les variations de h. **(01 pt)**
2) Calculer h(0) et déduire le signe de h(x) suivant la valeur de x. **(0,5pt)**

Partie B

Soit la fonction f définie par f(x) = x$e^{-x} + 1 - x$, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) d'unité 2cm.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(0,5pt)**
2) Montrer que la droite (D) : y = - x+1 est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) de f en +∞. Etudier la branche infinie de ($\mathscr{C}$) en -∞. **(01 pt)**
3) Calculer f '(x). Montrer que l'on peut écrire f '(x) sous la forme f '(x) = e^{-x} h(x). En déduire le tableau de variation de f. **(1,5 pt)**
4) Montrer qu'il existe un point A de ($\mathscr{C}$) tel que la tangente en A à ($\mathscr{C}$) soit parallèle à (D) . Déterminer l'équation de cette tangente (T). **(01 pt)**
5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions x_1 et x_2 avec $-0,9 < x_1 < -0,8$ et $1,3 < x_2 < 1,4$. **(01 pt)**
6) Tracer dans ce repère la droite (D), la tangente (T) et la courbe ($\mathscr{C}$). **(01 pt)**

Soit g la restriction de f à l'intervalle I = [0 ; +∞[.

7) **a)** Justifier que g réalise une bijection de [0 ; +∞[vers un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**

   b) Calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{e})$. **(0,5 pt)**

   c) Tracer dans le même repère (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) la courbe représentative de g^{-1}. **(0,5pt)**
8) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine limité par ($\mathscr{C}$), (D) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 en utilisant une intégration par parties. **(01 pt)**