UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

10 G 18bis AR
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (5 points).

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a. On note I et J les centres de gravités respectifs des triangles CFH et AFH et O le centre de la face $EFGH$.

1. a) Quelle est la nature du triangle CFH ? **0,5 pt**

b) Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de $[CF]$ et au plan médiateur de $[CH]$. **2 x 0,5 pt**

c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I. **2x 0,25 pt**

2. Montrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (AFH) et passe par J. **2x 0,25 pt**

3. Montrer que les points A, J, I et C sont cocycliques et que $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{JI}$. **2x 0,5 pt + 0,25 pt**

Démontrer que $\widehat{IOJ}$ est indépendant de a. [On pourra calculer $\tan \widehat{AOO'}$ avec O' milieu de $[AC]$]

4. Soit s_1 la réflexion de plan (CFH) et s_2 la réflexion de plan (AFH). On pose $R = s_2 \circ s_1$. P est le plan (ACG).

a) Montrer que $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à P. **0,25 pt**

b) On oriente P par $\overrightarrow{OH}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de R. **0, 5 pt**

5. Soit r la restriction de R au plan P et h l'homothétie de P qui transforme I en C et J en A. Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r \circ h$. **0, 5 pt**

EXERCICE 2 (4 points).

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1, 30]$.

1. On considère l'équation

$$(E): \quad 19x + 31y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de (E). **0,5 pt**

b) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E). **0,5 pt**

c) En déduire qu'il existe un unique entier x_0 appartenant à A et tel que $19x_0 \equiv 1\ [31]$. **0,25 pt**

2. Soit a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab \equiv 0\ [31]$ alors $a \equiv 0\ [31]$ ou $b \equiv 0\ [31]$. **0,5 pt**

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1\ [31]$ alors $a \equiv 1\ [31]$ ou $a \equiv -1\ [31]$. **0,25 pt**

3. a) Montrer que pour tout entier p de A il existe un entier relatif q tel que $pq \equiv 1$ [31].

0,5 pt

b) Déduire de a) pour tout p appartenant à A il existe un unique entier q de A tel que $pq \equiv 1$ [31]. On note cet entier $inv(p)$.

0,5 pt

c) Quels sont les entiers p de A qui vérifient $inv(p) = p$? **0,5 pt**

d) Déduire de b) que $30! \equiv -1$ [31]. **0,5 pt**

PROBLEME (11 points).

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rrcl} f: & [-\pi,\ \pi] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = \dfrac{9}{5 - 2\cos t + 2\sqrt{3}\sin t} \end{array}$$

Partie A

1. a) Trouver deux réels a et t_0 tels que pour tout t appartenant à $[-\pi,\ \pi]$ on ait :

$$5 - 2\cos t + 2\sqrt{3}\sin t = 5 + a\cos(t + t_0).$$

1 pt.

b) En déduire le signe de $5 - 2\cos t + 2\sqrt{3}\sin t$.

Montrer que f est définie sur $[-\pi,\ \pi]$. **1+0.5 pt.**

2. Etudier les variations de f, tracer sa courbe représentative dans le repère $\mathfrak{R}$.

1 pt +0,5 pt

Partie B

Pour tout réel t appartenant à $[-\pi,\ \pi]$, on considère le point $m(t)$ de coordonnées

$$x(t) = f(t)\cos t,\ y(t) = f(t)\sin t.$$

Soit (Γ) l'ensemble des points $m(t)$ lorsque t varie dans $[-\pi,\ \pi]$.

Soit $M(t)$ l'image de $m(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on pose :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \text{ et } Z(t) = X(t) + iY(t)$$

affixes respectives de $m(t)$ et M(t).

1. a) Calculer $Z(t)$ en fonction de $z(t)$ puis $X(t)$ et $Y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$ puis vérifier que :

$$X(t)^2 \ + \ Y(t)^2 \ = \ x(t)^2 \ + \ y(t)^2 = f(t)^2$$

4 x 0,25 pt

b) Etablir l'égalité $4X(t) + 9 = 5f(t)$. **0,5 pt**

c) Déterminer une équation cartésienne de la courbe à laquelle appartient $M(t)$.

[On cherchera une relation entre entre $X(t)$ et $Y(t)$ indépendante de t]. **0,5 pt**

2. Soit $(\mathcal{E})$ la courbe d'équation $x^2 + \frac{25}{9}y^2 - 8x - 9 = 0$.

a) Montrer que $(\mathcal{E})$ est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers et directrices.) **1 pt**

b) En déduire la nature de la courbe (Γ).

0,5 pt

3. A tout réel φ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on associe la droite (D_φ) d'équation $y = x\tan\varphi$.

a) Démontrer que (D_φ) coupe $(\mathcal{E})$ en deux points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = -9\frac{e^{i\varphi}}{5+4\cos\varphi} \text{ et } z'' = 9\frac{e^{i\varphi}}{5-4\cos\varphi}.$$ **1 pt**

b) Soit H le point d'affixe h tel que $\frac{2}{h} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$.

Déterminer l'ensemble des points H lorsque φ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. **1 pt**

c) Démontrer que le nombre $\left(z' + \frac{9}{4}\right)\left(z'' + \frac{9}{4}\right)$ est un réel strictement positif.

En déduire que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AM''}, \overrightarrow{u})$, A étant le point de coordonnées $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$.

Déterminer les bissectrices de l'angle $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''})$. **0,75 pt +0,5 pt+ 0,25 pt**

On rappelle qu'un angle a deux bissectrices qui sont perpendiculaires, l'une est dite bissectrice intérieure et l'autre bissectrice extérieure.