UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

11 G 18 bis A R

Durée : 4 heures

Séries : S1-S3 Coeff 8

Epreuve du 1[er] groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 19

EXERCICE 1. (4 pts)

Soit Δ une droite de repère $(O, \vec{u})$ dans le plan orienté, Δ' l'image de Δ par le quart de tour direct de centre O.

Soit I un point du plan tel que la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$ appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$. H et H' sont les projetés orthogonaux de I respectivement sur Δ et Δ'. Les figures demandées seront réalisées en choisissant $OH = 4$cm et $OH' = 2$cm.

A chaque point M de Δ distinct de O on associe le cercle C_M passant par O, I et M.

1. a) Si M est en O on convient que C_O est le cercle tangent en O à Δ et passant par I. Préciser le centre de C_O et tracer ce cercle sur la figure.

0,25 pt

b) Montrer qu'il existe un point A de Δ et un seul tel que le cercle C_A soit tangent à Δ'. Préciser le centre de C_A et tracer ce cercle sur la figure.

2 × 0,25 pt

Le cercle C_M, s'il n'est pas tangent à Δ' recoupe cette droite en un point M' autre que O. En particulier, C_O recoupe Δ' en un point O'.

Si M est en A, on convient que $A' = O$.

2. Soit s l'unique similitude directe du plan associant O à O' et A à A'.

a) Montrer que l'angle de s admet pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt

b) Déterminer le centre de cette similitude. (On établira qu'il appartient à C_A et C_O).

0,5 pt

c) Déterminer l'image de H par s et en déduire le rapport de s.

2 × 0,5 pt

3. Prouver que pour tout point M de Δ. $s(M) = M'$. **0,5 pt**

0,75 pt pour la figure

EXERCICE 2. (3 pts)

Un tournoi de lutte oppose deux écuries A et B qui jouent 3 parties successives de lutte. Les parties sont supposées indépendantes. Le vainqueur du tournoi est l'écurie qui a gagné le plus de parties. Chaque partie est notée A, B ou N suivant que l'écurie A gagne, B gagne ou que la partie est nulle. A chaque partie, l'écurie A a une probabilité $a = 0.5$ de gagner, l'écurie B a une probabilité $b = 0.4$ de gagner.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur. Constater qu'ils sont au nombre de 7.

0,5 pt

On pose $c = 1 - a - b$. Calculer en fonction de a, b et c la probabilité s pour que le tournoi soit sans vainqueur.

Vérifier que $s = 0,121$.

0,5+0,25 pt

2. a) Calculer la probabilité p pour que l'écurie A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.

0,5 pt

b) Calculer en fonction de a et c la probabilité q que l'écurie A soit vainqueur du tournoi. Vérifier que $q = 0,515$.

0,5 +0,25 pt

3. Sachant que l'écurie B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'écurie B ait gagné exactement deux parties.

0,5 pt

EXERCICE 3. (3 pts)

On rappelle *le petit théorème de Fermat :* Si p est un entier naturel premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Déterminer un entier naturel n tel que $2^n \equiv 1\ [11]$.

0,25 pt

2. Soit a un entier naturel non divisible par 11. Démontrer que $a^{10} \equiv 1\ [11]$.

0,5 pt

3. Soit a un entier naturel non nul. On appelle ordre de a (modulo 11), le plus petit entier naturel k non nul tel que $a^k \equiv 1\ [11]$.

a) Soit k_0 l'ordre de a. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 10 par k_0 vérifie $a^r \equiv 1\ [11]$.

0,5 pt

b) En déduire que k_0 divise 10.

0,5 pt

c) Quelles sont les valeurs possibles de k_0 ?

0,25 pt

4. a) Déterminer l'ordre modulo 11 de l'entier naturel 7.

0,5 pt

b) A tout entier naturel n non nul, on associe le nombre $A_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 10^n$. Montrer que $A_{2011} \equiv 0\ [11]$.

0,5 pt

PROBLEME. (10 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = a^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln a}$; $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. **a)** Justifier la dérivabilité de f_a sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'_a(x)$ pour $x > 0$.

0,25 + 0,5 pt

b) La fonction f_a est-elle dérivable au point 0 ?

0,5 pt

c) Etudier la limite de f_a en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f_a selon les valeurs de a.
0,25 +0,5 pt

2. a) Donner une équation de la tangente $(\mathcal{T}_a)$ à la courbe $\mathcal{C}_a$ au point A d'abscisse 1.
0,25 pt

b) Calculer $f_a''(x)$ pour $x > 0$. Etudier selon les valeurs de a le signe de $f_a''(x)$ pour $x > 0$.
En déduire l'existence d'un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_a$ si $a > 1$.
2× 0,5+0,25 pt

3. Construire dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ la droite $(\mathcal{T}_e)$ tangente à $\mathcal{C}_e$ au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_e$.
0,5 pt

Dans la suite du problème, on suppose $a > 1$.

Partie B

On note (Π) la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_a$, l'axe des ordonnées et la droite Δ_a d'équation $y = a$.

1. Si $\mathcal{A}$ désigne en unités d'aires, l'aire du domaine (Π), justifier que $\mathcal{A} = a - \int_0^1 f_a(x)\,dx$.
0,25 pt

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$ et M' le point d'affixe $z' = x' + iy'$ image de M par r.
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
0,25 pt

b) Soit $\mathcal{C}'_a$ l'image de $\mathcal{C}_a$ par r.
Montrer que $\mathcal{C}'_a$ a pour équation :

$$y = -\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^2, x > 1.$$

0,5 pt

c) Déterminer les images $\mathcal{T}'_a$ et Δ'_a de $\mathcal{T}_a$ et Δ_a respectivement par r.
2 × 0,25 pt

d) Construire $\mathcal{T}'_e$, Δ'_e et $\mathcal{C}'_e$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
0,25 pt

e) Soit (Π') la partie du plan délimitée par $\mathcal{T}'_a$, Δ'_a et $\mathcal{C}'_a$. A l'aide de deux intégrations par parties calculer en u.a l'aire $\mathcal{A}'$ de (Π').
En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f_a(x)\,dx$.
0,5 + 0,25 pt

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \int_0^x a^{\sqrt{t}}\,dt$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x^2$. On note φ la fonction $h \circ g$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
0,25 pt
a) Calculer $\varphi(0)$.
b) Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que : $\forall x \geq 0$, $\varphi'(x) = 2xa^x$.
0,25 +0,5 pt

c) En déduire que : $\forall x \geq 0$, $\varphi(x) = \frac{2a^x}{\ln a}\left(x - \frac{1}{\ln a}\right) + \frac{2}{\ln^2 a}$.

0,5 pt

d) Retrouver alors I. 0,25 pt

Partie C

Pour tout entier naturel non nul k on pose : $u_k = \int_{(k-1)/k}^{k/(k+1)} f_a(t)\,dt$ et soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \int_0^{n/(n+1)} f_a(t)\,dt$. **0,5 pt**

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I - S_n = \int_{n/(n+1)}^{1} f_a(t)\,dt$$

et que $\frac{1}{n+1}\, a^{\sqrt{n/(n+1)}} \leq I - S_n \leq \frac{a}{n+1}$. **2 × 0,5 pt**

3. En déduire la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$. **0,25 pt**