OFFICE DU BACCALAUREAT
éléfax (221) 33 824 65 81 - Tél. : 33 824 95 92 - 33 824 65 81

Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCICE 1 (05 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.(unité graphique 2 cm)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $4z^2 - (8 - 6i)z + 1 - 5i = 0$. **(0,5 pt)**

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\frac{3}{2} - i$; i et $1 + \frac{1}{2}i$.
   a) Placer les points A, B, C et D dans le repère. **(01 pt)**
   b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABD. **(0,75 pt)**

3) Soit f la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z + 1 - i$.
   Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f. **(01 pt)**

4) On considère les suites de nombres complexes (z_n) et (a_n) définies respectivement par :
$$\begin{cases} z_0 = i + 2 \\ Z_{n+1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z_n + 1 - i, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   et $a_n = z_n - 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 pt)**
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} + 2.$$
   c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels P_n, le point-image de z_n, est sur l'axe réel. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au soleil.
On considère la série statistique double (i, d_i) où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i la distance au soleil de la planète i (en millions de kilomètres).

Planètes	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne	Uranus
Numéro d'ordre i	1	2	3	4	5	6	7	8
Distance d_i au soleil	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1427,7	2872,4

1) On pose $y_i = ln(d_i - d_1)$, avec $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Compléter le tableau en donnant les valeurs de y_i au dixième près. **(01,5 pt)**

i	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3,9						

b) Construire le nuage de points M_i (i, y_i), 2 ≤ i ≤ 8, de cette série notée (i, y) dans un repère orthonormal, unité graphique : 2 cm. **(0,5 pt)**

c) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression (D) de y en i, $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. **(02 pts)**
Donner les formules, ensuite les résultats à 10^{-3} près.

2) a) Sachant que $y(i) = y_i$, déduire de ce qui précède que : $d_i = 57{,}94 + 11{,}965\,(1{,}958)^i$.
(les coefficients sont arrondis à 10^{-3} près). **(0,5 pt)**

b) Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.
(Ce résultat est connu sous le nom de loi de Titius – Bode du nom de deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n°9 en 1848) **(0,5 pt)**

PROBLEME **(10 points)**

La fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0. \\ f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \ln(x+1), \text{ si } -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

($\mathscr{C}_f$) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

PARTIE A

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-1 ; +\infty[$. **(0,5 pt)**

2) a) Montrer les égalités suivantes :

$$\lim_{x \mapsto -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 1$$

(0,5 pt)

b) Déduire de la question précédente les droites asymptotes de ($\mathscr{C}_f$). **(0,5 pt)**

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. **(0,25 pt)**

b) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**

c) En posant h = $\dfrac{1}{x}$ étudier ; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. **(0,25 pt)**

d) Etudier $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. **(0,25 pt)**

f est-elle dérivable en 0 ? **(0,25 pt)**
Interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 pt)**

4) Démontrer que :

a) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. **(0,75 pt)**

b) Pour tout $x \in]-1\,;0[$, $f'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$. **(0,75 pt)**

5) Dresser le tableau de variation de f. **(01 pt)**

6) Tracer ($\mathscr{C}_f$) la courbe de f. **(02 pts)**

PARTIE B

Soit α un nombre réel tel que $-1 < \alpha < 0$.

1) a) Montrer que pour tout x tel que $-1 < x < 0$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. **(0,25 pt)**

b) En utilisant une intégration par parties démontrer que :
$\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)\,dx = -\alpha\ln(\propto+1) + \alpha - \ln(\alpha+1)$. **(01 pt)**

2) a) En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathscr{C}_f$) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$. **(0,5 pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -1^+} A(\alpha)$. **(0,5 pt)**