UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/ 2

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

11 G 18bis B R
Durée: 2 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998

EXERCICE 1. (4 pts)

1. Factoriser le polynôme p défini par $p(z) = z^4 + 4z^2 + 4$.

1 pt

2. Soit b un entier supérieur ou égal à 5. Déduire de la question 1 que le nombre dont l'écriture dans la base b est $\overline{10404}_b$ est un carré parfait.

1.5 pt

3. Ecrire dans la base 9 le quotient de $\overline{10404}_9$ par $\overline{102}_9$.

1.5 pt

EXERCICE 2. (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1. On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z différent de i associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i).$$

0.5 pt

2. a) Démontrer que pour tout point $M(z)$ avec z différent de i d'image $M'(z')$ par f, on a :

$$(z' + 2i)(z - i) = 1.$$

1 pt

b) En déduire que :

$$BM' \times AM = 1$$
$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi].$$

1 pt

3. a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

0.5 pt

b) En utilisant le résultat de la question 2 *b* construire le point E' associé à E par f.
On laissera apparents les traits de construction.

1 pt

EXERCICE 3. (4 pts)
Soient A, B, C et D quatre points non alignés tels que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}.$$

1. On considère la rotation r_A de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ et la rotation r_B de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

a) Construire l'image de A par l'application $r_B \circ r_A$.

1 pt

b) Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r_B \circ r_A$.

1 pt

2. Soit la rotation r_C de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ et la rotation r_D de centre D et d'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

a) Déterminer avec précision l'application $f = r_D \circ r_C \circ r_B \circ r_A$.

1 pt

b) On suppose que $ABCD$ est un losange. Préciser f.

1 pt

EXERCICE 4. (4 pts)
Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) &= t \ln t \\ y(t) &= \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}, \ t \in [1/e, e]$$

1. Exprimer $x(1/t)$ et $y(1/t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie que l'on précisera et que l'on peut réduire l'étude à l'intervalle $[1/e, 1]$. 1 pt

2. Etudier les variations de x et de y sur l'intervalle $[1/e, 1]$. 1 pt
Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points de paramètres $t = 1/e$ et $t = 1$. 1 pt

3. Construire $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique 2 cm) 1 pt

EXERCICE 5. (4 pts)
Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. 1 pt

2. a) Montrer que $\forall x \in [\dfrac{3}{2}, 2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$. 1 pt

b) Déterminer la racine positive ℓ de l'équation $f(x) = x$. 1 pt

3. a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{4}{9}|u_{n+1} - \ell|$ puis que
$\forall n \geq 1$, $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|$. 0.5 pt

b) En déduire que (u_n) converge vers ℓ. 0.5 pt