UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 

12 G 18 Bis AR
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

**Epreuve du $1^{er}$ groupe**

# MATHEMATIQUES

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

---

**Exercice 1** (5 **points** ).

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): \ z^2 + (6\cos t)z + 9 + 7\sin^2 t = 0$$

où $t$ est un paramètre réel appartenant à $]0, \pi[$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

$0,5$ **pt**

On notera $z_1$ et $z_2$ les solutions avec $\text{Im } z_1 > 0$.

**2.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on note $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

**a.** Montrer que les points $M_1$ et $M_2$ appartiennent à une ellipse $(\Gamma)$ dont on donnera une équation.
$1$ **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**b.** Donner les éléments géométriques caractéristiques de $(\Gamma)$ puis construire $(\Gamma)$ dans le repère.
$1$ **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**c.** Placer les points $M_1$ et $M_2$ pour $t = \dfrac{\pi}{3}$.

$0,5$ **pt**

**3.** Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $z = x + iy, x$ et $y$ réels associe le $M'$ d'affixe $z' = x' + iy' = \dfrac{1}{6}(7z + \overline{z})$, $x'$ et $y'$ réels.

**a.** Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$. $0,5$ **pt**

**b.** On pose $(\Gamma') = f(\Gamma)$. Montrer que $(\Gamma')$ est un cercle que l'on construira dans le repère.
$0,5$ **pt**

**c.** Pour tout point $M'$ de $(\Gamma')$ image d'un point $M$ de $(\Gamma)$, on note $H$ le projeté orthogonal de $M'$ sur l'axe des ordonnées.

Montrer que $\overrightarrow{HM'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{HM}$.

En déduire une méthode géométrique qui permet de construire l'ellipse $(\Gamma)$ point par point à partir de $(\Gamma')$. $1$ **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**Exercice 2** (4 **points**).

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$.

On suppose que pour tout entier naturel $n$ non nul la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ existe ; on la note $f^{(n)}$. On pose $f^{(0)} = f$.

**1. a.** Déterminer les coefficients $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1).$$

Démontrer alors que toutes les fonctions dérivées $n^{\text{ième}}$ de $f$ vérifient (1).

1 **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**b.** Déterminer l'ensemble des primitives de $f$. Montrer qu'une et une seule de ces primitives vérifie (1).

$0,75$ **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,25$ **pt**

**2.** Montrer que la fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$0,25$ **pt**

**3. a.** Démontrer par récurrence l'existence de deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ qui vérifient pour tout entier naturel $n$ : $\begin{cases} f^{(n)} &= a_n f' + b_n f \\ a_{n+1} &= 6a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -9a_n \end{cases}$

$0,5$ **pt**

**b.** On définit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n &= 3a_n + b_n \\ v_n &= -3^{-n-1} b_n \end{cases}$

Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et donner son premier terme ; vérifier ensuite que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et donner son premier terme .

1 **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**c.** Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de $n$ et de $x$.

$0,5$ **pt**

**PROBLEME** (11 **points**).

## Partie A

On considère pour tout entier strictement positif $n$ la fonction $f_n$ définie par :

$$f_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \ln|x-1|$$

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 2 cm). On note $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans ce repère.

**1. a.** Déterminer les limites de $f_n$ aux bornes de son ensemble de définition.

$0,75$ **pt**

**b.** Etudier les branches infinies de $(C_n)$.
(On distinguera les cas $n = 1$, $n$ impair différent de 1 et $n$ pair).

$0,75$ **pt**

**2. a.** Montrer que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \neq 1$, $f_n'(x) = \dfrac{x^n}{x-1}$.

1 **pt** $= 0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**b.** Etudier le sens de variation de $f_n$ et dresser le tableau de variation de $f_n$.
(On distinguera les cas $n$ impair et $n$ pair).

1 **pt** $=0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**3. a.** Calculer la dérivée seconde de $f_n$.
Etudier l'ensemble des points d'inflexion de $(C_n)$.
On rappelle qu'un point $M$ de $(C_n)$ d'abscisse $x_0$ est un point d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde de $f_n$ s'annule en $x_0$ et change de signe.
(On distinguera les cas $n = 1$, $n$ impair différent de 1 et $n$ pair).

$0,75$ **pt** $=0,25$ **pt** $+0,5$ **pt**

**b.** Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on note $T_n$ la tangente à $C_n$ au point d'abscisse $\frac{n}{n-1}$.

Tracer les courbes $(C_2)$ et $(C_3)$ ainsi que les tangentes $T_2$ et $T_3$.

$0,75$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,25$ **pt**

**4. a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un réel unique $\alpha_n > 1$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

$0,25$ **pt**

**b.** Vérifier que pour tout entier $n > 1$ on a :

$$f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n^n \text{ et } -\frac{1}{n}\alpha_n^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1}).$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)$ est strictement monotone et convergente.

$1,5$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,25$ **pt**$+0,5$ **pt** $+0,25$ **pt**

**c.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul, $p$ on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}.$$

Vérifier alors que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**d.** En déduire que : $\alpha_n < 1 + \frac{1}{n}$. Calculer alors la limite de la suite $(\alpha_n)$.

$0,75$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,25$ **pt**

## Partie B

**1.** Montrer que : $\forall x < 1,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{t-1}\, dt$ et que $\forall x > 1,\ f_n(x) = \displaystyle\int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1}\, dt$.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**2.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n(-1)\right| \leq \displaystyle\int_{-1}^0 (-t)^n\, dt$ ; Calculer alors $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} f_n(-1)$.

$1$ **pt** $=0,5$ **pt** $+0,5$ **pt**

**3.** Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par :

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

$0,5$ **pt**