UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

12 G 18 Bis AR
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Les solutions proposées par la commission d'examen ne sont que des indications.
Un candidat peut très bien en donner d'autres et même de meilleures.
Le correcteur se fera donc un devoir d'explorer toutes les pistes proposées par les candidats.

Correction de l'exercice 1.

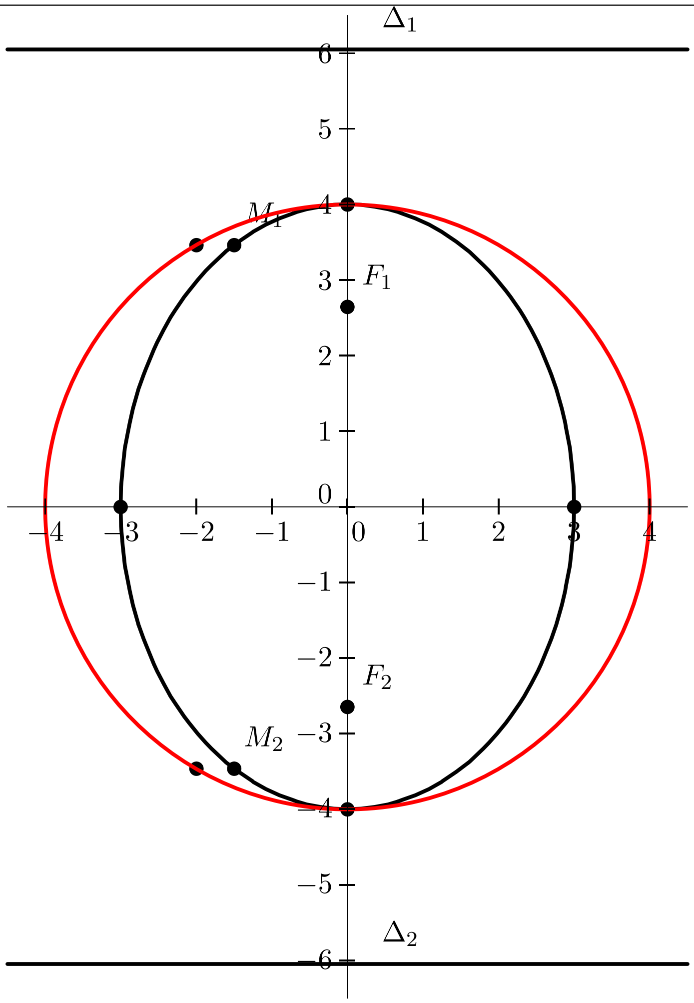
1. E est une équation du second degré dont le discriminant réduit est

$$\Delta' = 9\cos^2 t - (9 + 7\sin^2 t) = 9(1 - \sin^2 t) - (9 + 7\sin^2 t) = -16\sin^2 t$$

Par conséquent les solutions de (E) sont $z_1 = -3\cos t + 4i\sin t$ et $z_1 = -3\cos t - 4i\sin t$
a. Les coordonnées du point M_1 d'affixe z_1 sont $x_t = -3\cos t$ et $y_t = 4i\sin t$, on a donc

$$\frac{x_t^2}{9} + \frac{y_t^2}{16} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

M_1 est donc un point de l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; même raisonnement avec M_2.
b. (Γ) est l'ellipse de centre O, de sommets les points d'affixes $-a, a, -bi, bi$ avec $a = 3$ et $b = 4$; de foyers les points d'affixes $-ci, ci$ avec $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ et de directrices les droites d'équations $y = \dfrac{b^2}{c} = 16\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ et $y = -\dfrac{b^2}{c} = -16\dfrac{\sqrt{7}}{7}$



c. Les points M_1 et M_2 pour $t = \frac{\pi}{3}$ sont pour affixes respectives $-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}i$ et $-\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}i$.

2. a. La relation $z' = x' + iy' = \frac{1}{6}(7z + \overline{z})$ se traduit par : $x' + iy' = \frac{1}{6}\Big[7(x+iy) + x - iy\Big]$; donc $x' = \frac{4}{3}x$ et $y' = y$.

b. Soit M un élément de (Γ) d'affixe $z = x + iy$ et M' d'affixe $z' = x' + iy'$ son image par f.

Alors $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ et la relation $x' = \frac{4}{3}x$ et $y' = y$ entrainent $\frac{\left(\frac{3}{4}x'\right)^2}{9} + \frac{y'^2}{16} = 1$ i.e $x'^2 + y'^2 = 4^2$. Donc $f(M)$ appartient au cercle (Γ') de centre O et de rayon 2.

Par conséquent, $f(\Gamma) \subset (\Gamma')$.

Réciproquement, soit M' un élément de (Γ') d'affixe $z' = x' + iy'$ i.e tel que $x'^2 + y'^2 = 4^2$ et M d'affixe $z = x + iy$ avec $x = \frac{3}{4}x'$ et $y = y'$.

Alors $M' = f(M)$ et la relation $x'^2 + y'^2 = 4^2$ entraine $\left(\frac{4}{3}x\right)^2 + y^2 = 16$ i.e $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Donc M appartient à (Γ).

Par conséquent, $(\Gamma') \subset f(\Gamma)$.

Conclusion : $f(\Gamma) = (\Gamma')$.

c. Si M a pour affixe $z = x + iy$ et son image M' a pour affixe $z' = x' + iy'$, alors $x' = \frac{4}{3}x$ et $y' = y$, H a pour affixe $iy' = iy$ et $z_{\overrightarrow{HM'}} = z_{M'} - z_H = x' = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}z_{\overrightarrow{HM}}$; donc $\overrightarrow{HM'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{HM}$.

Pour construire un point de (Γ), on part d'un point M' de (Γ') que l'on projette en H sur l'axe des ordonnées ; l'image de M' par l'homothétie de centre H et de rapport $\dfrac{3}{4}$ est alors un point de (Γ).

Remarque 1. f est l'affinité orthogonale d'axe l'axe des ordonnées et de rapport $\dfrac{4}{3}$. et (Γ') est le grand cercle de (Γ).

Correction de l'exercice 2.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x} \text{ et } f''(x) = (18x+21)\mathrm{e}^{3x}$$

Pour que f soit solution de l'équation différentielle (1) il suffit que $f'' + af' + bf = 0$ i.e

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 18x + 21 + a(6x+5) + b(2x+1) = 0$$

ou

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (18 + 6a + 2b)x + 21 + 5a + b = 0.$$

On doit donc avoir : $\begin{cases} 3a + b + 9 &= 0 \\ 5a + b + 21 &= 0 \end{cases}$. En faisant la différence, on trouve $a = -6$ puis $b = 9$ et l'équation différentielle du second ordre vérifiée par f est $y'' - 6y' + 9y = 0$.

b. l'équation différentielle du second ordre vérifiée par f est $y'' - 6y' + 9y = 0$ signifie que $f'' - 6f' + 9f = 0$ et en dérivant n fois cette relation on obtient

$$(f'')^{(n)} - 6(f')^{(n)} + 9f^{(n)} = 0$$

i.e

$$(f^{(n)})'' - 6(f^{(n)})' + 9f^{(n)} = 0.$$

$f^{(n)}$ est bien solution de l'équation différentielle

2. Dans la question précédente on a montré que f est bien solution de l'équation différentielle.

3. Soit F une primitive de f, la relation $f'' - 6f' + 9f = 0$ vérifiée par f devient $(f' - 6f + 9F)' = 0$ i.e $f' - 6f + 9F = c$, constante réelle. Donc $F = \dfrac{1}{9}(-f' + 6f + c)$.

Finalement il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{9}(6x+1)\mathrm{e}^{3x} + c.$$

et l'ensemble des primitives de f est $\{x \mapsto \dfrac{1}{9}(6x+1)\mathrm{e}^{3x} + c,\ c \in \mathbb{R}\}$

Pour que F vérifie (1) il faut et il suffit que $F'' - 6F' + 9F = 0$ i.e $f' - 6f + 9F = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ (6x+5)\mathrm{e}^{3x} - 6(2x+1)\mathrm{e}^{3x} + (6x+1)\mathrm{e}^{3x} + c = 0$.

On doit donc avoir $c = 0$ et la seule primitive de f vérifiant (1) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{9}(6x+1)\mathrm{e}^{3x}$$

4. a. On a $f^{(0)} = f = 0f' + 1f$, donc en prenant $a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ a_1 = 6a_0 + b_0 = 1$ et $b_1 = -9a_0 = 0$, on voit que la propriété p_n : $\begin{cases} f^{(n)} &= a_n f' + b_n f \\ a_{n+1} &= 6a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -9a_n \end{cases}$ est vraie pour $n = 0$.

Supposons que p_n soit vraie pour un entier n donné et montrons que p_{n+1} est alors vraie.

En dérivant la relation $f^{(n)} = a_n f' + b_n f$ on obtient

$$f^{(n+1)} = a_n f'' + b_n f' = a_n(6f' - 9f) + b_n f' = (6a_n + b_n)f' - 9a_n f;$$

il suffit donc de poser $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -9a_n$ pour voir que p_{n+1} est vraie

b. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3(6a_n + b_n) - 9a_n = 9a_n + 3b_n = 3u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 3$ et son premier terme est $u_0 = 3a_0 + b_0 = 1$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n = 3^n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -3^{-n-2}b_{n+1} = 3^{-n-2}9a_n = 3^{-n}\frac{1}{3}(u_n - b_n) = \frac{1}{3} + v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et son premier terme est $v_0 = -3^{-1}b_0 = -\frac{1}{3}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3}(n-1)$.
c. Pour calculer $f^{(n)}(x)$, il suffit de connaitre a_n et b_n.
Les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n &= 3a_n + b_n \\ v_n &= -3^{-n-1}b_n \end{cases}$ sont équivalentes à : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n &= \frac{1}{3}(u_n - 3^{n+1}v_n) \\ b_n &= -3^{n+1}v_n \end{cases}$

i.e $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n &= n3^{n-1} \\ b_n &= 3^n(-n+1) \end{cases}$ [1]; par conséquent

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n3^{n-1}f'(x) + 3^n(-n+1)f(x) \\ &= 3^{n-1}(6x + 2n + 3)\mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

Correction du problème.

Partie A

1. Un réel x appartient à l'ensemble D_n de définition de f_n ssi $x - 1 \neq 0$; donc $D_n = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Limites de f_n aux bornes de l'ensemble de définition :
Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ on peut écrire en mettant le monôme de plus haut degré en facteur :

$$f_n(x) = x^n \Big[\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)x} + \frac{1}{n} + \frac{\ln|x-1|}{x^n}\Big]$$

La fonction entre crochets a pour limite $\frac{1}{n}$ car pour tout réel $\alpha > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ et $\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}$ ont pour limite 0. Donc $f_n(x)$ et x^n ont la même limite ; plus précisément :
- Si n est pair, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_n(x) = +\infty$
- Si n est impair, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_n(x) = -\infty$.

Quand x tend vers 1 la partie polynômiale de f_n a une limite finie car les fonctions polynômes sont continues ; la fonction $x \mapsto \ln|x-1|$ a pour limite $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\mapsto 1} f_n(x) = -\infty$.
a. *Branches infinies :*
Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ on peut écrire

$$\frac{f_n(x)}{x} = \frac{x^n}{x}\Big[\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)x} + \frac{1}{n} + \frac{\ln|x-1|}{x^n}\Big]$$

La fonction entre crochets a pour limite $\frac{1}{n}$, donc $f_n(x)$ et x^{n-1} ont la même limite ; plus précisément :
- Si $n = 1$, $\frac{f_n(x)}{x}$ a pour limite 1
  et $f_n(x) - x = \ln|x-1|$ a pour limite $+\infty$
  La courbe C_n admet donc une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.
- Si n est impair et > 1, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$.
  La courbe C_n admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

1. On voit immédiatement que a_n et b_n sont solutions de l'équation aux différences finies $\alpha_{n+2} - 6\alpha_{n+1} + 9\alpha_n = 0$ dont l'équation caractéristique (qui est aussi celle de (1)), $r^2 - 6r + 9 = 0$ admet 3 comme racine double.
L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\{(sn+t)\ 3^n,\ s, t \in \mathbb{R}\}$.
Avec les conditions initiales, on trouve $a_n = n3^{n-1}$ et $b_n = 3^n(-n+1)$

- Si n est pair, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_n(x) = -\infty$. La courbe C_n admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. a. La fonction f_n est dérivable dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ car les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln|x-1|$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$. De plus pour tout $x \neq 1$, $f_n'(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{1}{x-1}$.

La partie polynômiale de cette expression est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison x et de premier terme 1 ; donc $f_n'(x) = \dfrac{x^n-1}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^n}{x-1}$.

Etude du sens de variation de f_n :

Si n est pair, $f_n'(x)$ s'annule seulement en 0 et a le même signe $x-1$ dans $D_n \setminus \{0\}$; dans ce cas, voici le tableau de variation de f_n.

x	$+\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)(n \text{ pair})$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est un nombre impair $2p+1, p \in \mathbb{N}$, $f_n'(x) = \dfrac{x}{x-1}x^{2p}$ s'annule seulement en 0 et a le même signe $x(x-1)$ dans $D_n \setminus \{0\}$; dans ce cas, voici le tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)(n \text{ impair})$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. *Etude de l'ensemble des points d'inflexions de C_n :*

La fonction f_n est deux fois dérivable dans D_n et $\forall x \in D_n$, $f_n''(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(x-1)^2}\Big[(n-1)x - n\Big]$

- Si $n = 1$ alors $f_n''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ est strictement négatif ; la courbe (C_1) n'a donc pas de point d'inflexion.

- Si $n > 1$, f_n'' s'annule en $x_0 = 0$ et $x_1 = \dfrac{n}{n-1}$.

* Si n est impair et > 1, voici le tableau des signes de f_n''.

x	$-\infty$		x_0		1		x_1		$+\infty$
$f_n''(x)(n \text{ impair})$		$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Il y a un seul point d'inflexion : le point de C_n d'abscisse x_1.

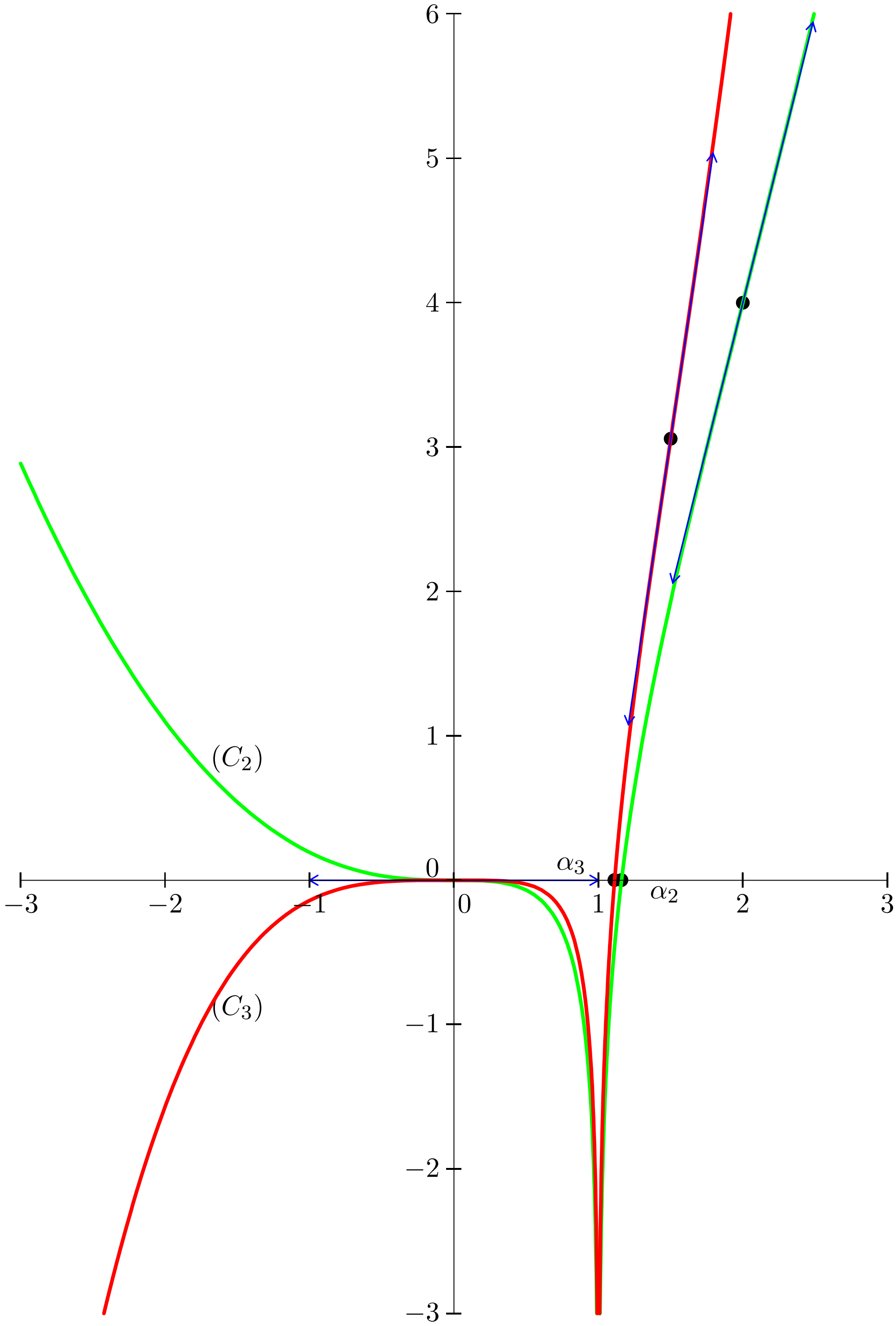
* Si n est un nombre pair $2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall x \in D_f$, $f_n''(x) = \dfrac{x^{2(p-1)}}{(x-1)^2}\, x\Big[(n-1)x - n\Big]$.

Voici le tableau des signes de f''.

x	$-\infty$		x_0		1		x_1		$+\infty$
$f_n''(x)(n \text{ pair})$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Il y a deux points d'inflexion : l'origine des coordonnées et le point de C_n d'abscisse x_1.

b.



4. a. f_n est continue et strictement croissante dans l'intervalle $I =]1, +\infty[$; par conséquent, sa restriction à I est une bijection de I sur $f_n(I) =]-\infty, +\infty[$. Comme $f_n(I)$ contient 0, il existe un unique α_n dans I tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$f_{n-1}(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n-1}x^{n-1} + \ln|x-1| = f_n(x) - \frac{1}{n}x^n.$$

Donc

$$f_{n-1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) - \frac{1}{n}\alpha_n^n = -\frac{1}{n}\alpha_n^n < 0 = f_{n-1}(\alpha_{n-1})$$

On tire de $f_{n-1}(\alpha_n) < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$ et de la croissance de f_{n-1} dans $]1, +\infty[$ que $\alpha_n < \alpha_{n-1}$; la suite (α_n) est donc strictement décroissante ; et puisqu'elle est minorée par 1, elle a une limite ≥ 1.

c. *Etablissement des inégalités* $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}$ *:*

Avec le théorème des accroissements finis :
La fonction ln est dérivable dans $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[, \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Le théorème des accroissements finis permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un réel c dans l'intervalle $]p, p+1[$ tel que

$$\frac{\ln(p+1) - \ln p}{(p+1) - p} = \ln'(c)$$

i.e

$$\ln(p+1) - \ln p = \frac{1}{c}$$

On en déduit, puisque $\frac{1}{c}$ appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right[$ que

$$\frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}$$

Avec l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{1}{x}dx$ *:*
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante dans $[p, p+1]$ donc

$$\forall x \in [p, p+1], \ \frac{1}{p} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{p+1};$$

et en intégrant ces inégalités on obtient :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\, dx \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\, dx,$$

i.e

$$\frac{1}{p+1} \leq \Big[\ln x\Big]_p^{p+1} \leq \frac{1}{p}$$

ou

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}.$$

En sommant ces inégalités de 1 à $n-1$, n entier > 1 on obtient :

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_1^{n-1} \Big(\ln(p+1) - \ln p\Big) \leq \sum_1^{n-1} \frac{1}{p}$$

i.e

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

Ce qui entraîne :

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

i.e

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$$

d. Posons $t_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} f_n(t_n) &= 1.t_n + \frac{1}{2}t_n^2 + \cdots + \frac{1}{n}t_n^n - \ln n \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n && \text{car } t_n > 1 \\ &> 0 && \text{d'après la question } c. \\ &= f_n(\alpha_n) \end{aligned}$$

On en déduit, puisque la fonction f_n est strictement croissante dans $]1, +\infty[$ que $t_n > \alpha_n$.

Les relations $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < \alpha_n < 1+\dfrac{1}{n},\ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et le théorème des gendarmes permettent de conclure que la suite (α_n) est convergente et de limite 1.

1. Pour tout $x < 1$, la fonction f_n est dérivable dans l'intervalle ayant pour extrémités 0 et x ; donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{t-1}\,dt = \int_0^x f_n'(t)\,dt = \Big[f_n(t)\Big]_0^x = f_n(x) - f_n(0) = f_n(x)$.

Pour tout $x > 1$, la fonction f_n est dérivable dans l'intervalle ayant pour extrémités x et α_n ; donc $\displaystyle\int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1}\,dt = \int_{\alpha_n}^x f_n'(t)\,dt = \Big[f_n(t)\Big]_{\alpha_n}^x = f_n(x) - f_n(\alpha_n) = f_n(x)$

2. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f_n(-1) &= \int_0^{-1} \frac{t^n}{t-1}\,dt &&= \int_{-1}^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt \\ \Rightarrow\ |f_n(-1)| &\leq \int_{-1}^0 \frac{|t^n|}{|1-t|}\,dt &&= \int_{-1}^0 \frac{(-t)^n}{1-t}\,dt \\ \Rightarrow\ |f_n(-1)| &\leq \int_{-1}^0 (-t)^n\,dt && \text{car } 1-t \geq 1 \end{aligned}$$

Dans la relation $0 \leq |f_n(-1)| \leq \displaystyle\int_{-1}^0 (-t)^n\,dt$, l'intégrale vaut $(-1)^n \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^0 = \dfrac{1}{n+1}$

Comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} f_n(-1) = 0$,

3. On a $f_n(-1) = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n} + \ln 2 = -v_n + \ln 2$ et puisque $f_n(-1)$ a pour limite 0, v_n a pour limite $\ln 2$ □