12 G 26 A R
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 ï Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

HEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant dôafficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCIE 1 (5 x 0,5 = 02,5 points)

1) Comparer les nombres complexes - i et [illegible] .

2) Résoudre dans lôensemble C des nombres complexes chacune des équations qui suivent.

a) z^3 ï 1 = 0.
b) z^3 = - i.
c) u^2 ï (1 ï i)u ï i = 0.
d) z^6 - (1 ï i)z^3 ï i = 0.

EXERCIE 2 (0,75 pt x 4 = 03 points)

Dans chacun des quatre cas ci-dessous, quatre déclarations/propositions a), b), c) et d) sont faites. Une seule de ces propositions est vraie. Indique pour chaque cas la proposition vraie. Pour cela recopie et complète le tableau ci-dessous

Cas	Proposition vraie
Cas N°1	
Cas N°2	
Cas N°3	
Cas N°4	

Cas N°1. Soient A et B les points dôaffixes respectives z_A = 1 et z_B = i. Lôensemble des points M dôaffixe z telle que [illegible] soit un imaginaire pur, est :

a) le cercle de diamètre [AB] ;
b) le cercle de diamètre [AB] privé du point A ;
c) la droite (AB) privée du point A ;
d) le cercle de diamètre [AB] privé de B.

Cas N°2. Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par :

U_0 = 1, U_1 = 2 et pour tout n $\in$ IN, U_{n+2} = [illegible] U[illegible] − [illegible] U[illegible].

La suite $(V_n)_{n\in IN}$ définie par V_n = U_{n+1} ï U_n, est :

a) une suite constante ;
b) une suite arithmétique ;
c) une suite géométrique ;
d) une suite divergente.

Cas N°3. On pose I = [illegible] x lnx dx. On a alors :

a) I = [illegible] ;
b) I = e ;
c) I = [illegible] ;
d) I = e ï 1.

Cas N°4. Dans une culture de microbes, le nombre de microbes en un instant t exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à lôinstant t du nombre de microbes est la dérivée yôde cette fonction. On a constaté que yô(t) = (ln2) y(t) et quôà lôinstant t = 0 la culture contient 200 microbes.

Alors le nombre de microbes dans la culture au bout de 5 heures est

a) 1000 ;
b) 1200 ;
c) 6000 ;
d) 6400

… séance d'entraînement, à un certain nombre de tirs directs.

- S'il a arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{ième}$) est 0,8.
- S'il a laissé passer le $n^{ième}$ tir, la probabilité qu'il arrête le suivant (le $n+1^{ième}$) est 0,6.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

On note A_n l'événement « le gardien arrête le $n^{ième}$ tir ».

1) a) Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $p(A_1)$, $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\bar{A}_n)$. **(0,75 pt)**
   b) Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ en fonction de $p(A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$ en fonction de $p(\bar{A}_n)$. **(0,5 pt)**
   c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $p(A_{n+1}) = 0{,}2\, p(A_n) + 0{,}6$. **(01 pt)**

2) On pose, pour $n \geq 1$, $p_n = p(A_n)$ et $U_n = p_n - 0{,}75$.
   a) Démontrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de 1er terme $U_1 = -0{,}05$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire une expression de U_n en fonction de n, puis une expression de p_n en fonction de n. **(01 pt)**
   c) Montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ admet une limite que l'on calculera. **(0,5 pt)**

PROBLEME **(10,25 points)**

PARTIE A **(02,75 pts)**

On considère l'application g de $[0 ; +\infty[$ dans IR définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$

1) a) Déterminer la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$. **(0,5 pt)**
   b) Calculer la dérivée de g et donner son tableau de variations. **(0,5 + 0,5 pt)**
2) Montrer que sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}9 < \alpha < 2$. **(0,5 + 0,25 pt)**
3) Préciser le signe de g sur $[0 ; +\infty[$. **(0,5 pt)**

PARTIE B **(06,5 pts)**

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm ;

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **(01 pt)**
2) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$. **(0,5 pt)**
3) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 + 0,25 pt)**
4) Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable et donner une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$. **(01 + 0,5 pt)**
5) Etablir que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$. **(0,5 + 0,25 pt)**
6) Donner le tableau de variations de f et tracer la courbe (C). (On prendra $\alpha \simeq 1{,}95$ et $f(\alpha) \simeq 0{,}85$). **(0,5 + 01,5 pt)**

PARTIE C **(01 point)**

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

1) Montrer que h est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
2) Représenter $(C_{h^{-1}})$, la courbe représentative de h^{-1}, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5 pt)**