CORRIGE

EXERCICE 1

1) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3$ = - i

2) a) $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = j = e^{2\pi i/3}$ ou $z = j^2 = e^{4\pi i/3}$.

b) $z^3 = -i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ou $z = j\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ou $z = j^2\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

c) $u^2 - (1-i)u - i = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = -i$

d) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 = u \\ u2 - (1-i)u - i = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z^3 = 1$ ou $z^3 = -I$

$\Leftrightarrow z = 1$

ou $z = j$ ou $z = j^2$ ou $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ou $z = j\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ou $z = j^2\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

EXERCICE 2

1) b) 2) c) 3) a) 4) d)

EXERCICE 3

1) a) $p(A_1) = 0,7$

$p(A_{n+1}/A_n) = 0,8$

$p(A_{n+1}/\overline{A_n}) = 0,6$

b) $p(A_{n+1} \cap A_n) = p(A_n) \times p(A_{n+1}/A_n) = 0,8\ p(A_n)$

$p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = p(\overline{A_n}) \times p(A_{n+1}/\overline{A_n}) = 0,6\ p\overline{A_n}$

c) $p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$

$\boxed{p(A_{n+1}) = 0,2\ p(A_n) + 0,6}$

2) a) $U_{n+1} = p_n+1 - 0,75$

$U_{n+1} = 0,2\ p_n + 0,6 - 0,75$

$U_{n+1} = 0,2\ p_n - 0,15$

$U_{n+1} = 0,2\ (p_n - 0,75)$

$\boxed{U_{n+1} = 0,2\ U_n}$

donc $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q = 0,2 et de 1er terme $U_1 = 0,05$

b) $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

$\boxed{U_n = (-0,05)(0,2)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1}$

$p_n = U_n + 0,75$

$\boxed{p_n = (-0,05)(0,2)^{n-1} + 0,75}$

a) c) $\lim\limits_{x \to +\infty} Un = 0$ car $q \in\ ]-1, 1[$

par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} p_n = 0,75}$

PROBLEME

PARTIE A

$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$, $x \in [0, +\infty[$

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{h \to +\infty} \ln h = +\infty$

par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$

par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

b) la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $[0, +\infty[$.
(comme restriction d'un polynôme du 2nd degré) et à valeurs strictement positives sur $[0, +\infty[$ or $h \to \ln h$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par composé $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$

D'autre part $x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+1}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ où le dénominateur ne s'annule pas

par somme g dérivable sur $[0, +\infty[$

Calcul de g'(x)

Le calcul donne en fin

$g'(x) = \frac{2x-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	0	+	0	-	
g	0	↗	$1 - \ln 2$	↘	$-\infty$

2) Si $x \in\ ]0, 1[$, $g(x) > 0$ et $g(0) = 0$

- La restriction de g à $[1, +\infty[$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection continue de $[1, -\infty[$ dans $]-\infty, 1 - \ln 2]$ et $0 \in\ ]-\infty, 1 - \ln 2]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1, +\infty[$

Montrons que 1,9 < α < 2

L'intervalle [1,9 ; 2] est contenu dan l'intervalle [1, +∞[donc la restriction de g à [1,9 ; 2] est bijective avec g(1,9) x g(2) < 0 d'où 1,9 < α < 2

3)

X	0		1		α		+∞
g	0	↗	1 – ln 2	↘		↘	-∞

si x ∈]0, α[, g(x) > 0
si x ∈]α, +∞[, g(x) < 0
si x ∈ {0, α}, g(x) = 0

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x) = x\ e^{\frac{1}{x}}, \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1) **Continuité de f en 0.**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{h \to -\infty} e^h = 0$ par composée $\lim'\limits_{x \mapsto 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ d'autre part $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} x = 0$

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = 0}$

$$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} x \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0 \text{ x } 1 = 0$$

Conclusion $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = f(0)$ d'où f continue en 0

Dérivabilité de f en 0

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ donc f est dérivable en 0 à gauche $\boxed{f'g(0) = 0}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ donc f est dérivable en 0 à droite $\boxed{f'd(0) = 1}$

Conclusion f'g(0) ≠ f'd(0) donc f non dérivable en 0

2) $f(x) - (x+1) = x\,e^{\frac{1}{x}} - x - 1$ posons $h = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim'\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}-1=0$ d'où la droite d'équation y = x + 1 est une droite asymptote à (C) en -∞

3) pour x > 0, f(x) peut s'écrire f(x) = $2\,\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$
si x $\mapsto$ +∞, 1 + $\frac{1}{x^2}$ $\to 0$ et si $x \to 1, \ln x \to 0$ par composé $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0}$

4) si x < 0, f'(x) = $e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\,x\,e^{\frac{1}{x}}$
f'(x) = $e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$
si x > 0, f'(x) = $\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}x-\ln(x^2+1)}{x^2}$

$\boxed{\text{si } x > 0,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$

5) on sait que α vérifie g(α) = 0
donc $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$
donc $\ln(\alpha^2 + 1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$
d'où $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$
$f(\alpha) = \dfrac{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

Encadrement de α

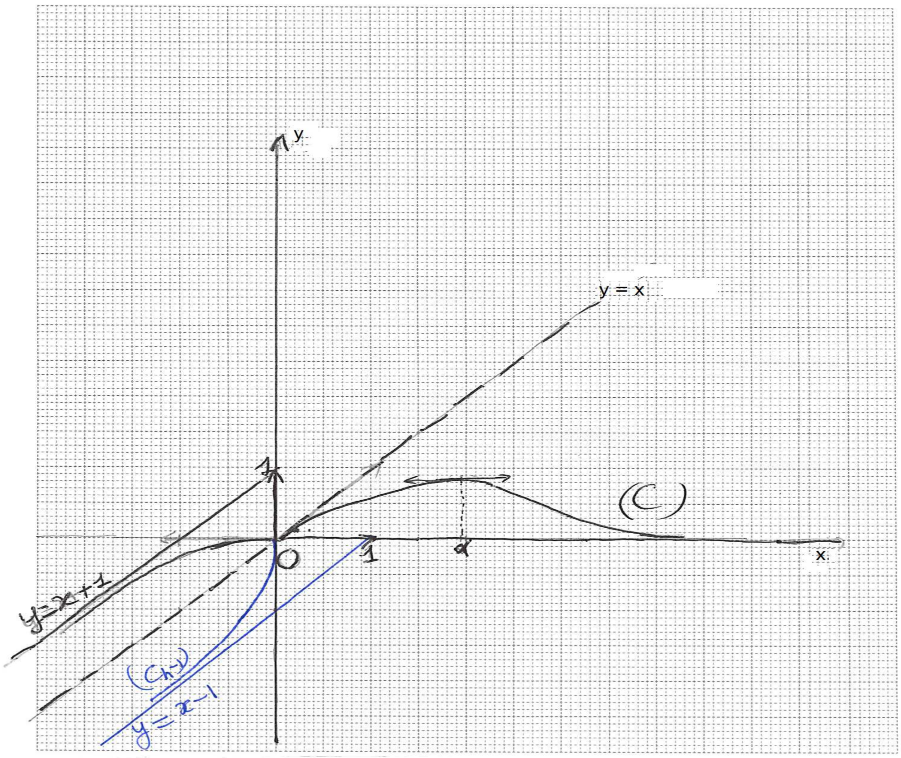
$1,9 \le \alpha \le 2$
$3,61 \le \alpha^2 \le 4$
$4,61 \le \alpha^2 + 1 \le 8$
$\frac{1}{5} \le \frac{1}{\alpha^2+1} \le \frac{1}{4,61}$
Par produit membre à membre

d'autre part
$3,8 \le 2\alpha \le 4$

$$\boxed{\frac{3,8}{5} \le f(\alpha) \le \frac{4}{4,61}}$$

6) Si x < 0, f'(x) > 0
Si x > 0, f'(x) a même signe que g(x) donc on obtient le tableau suivant

x	-∞		0		α		+∞
f'(x)		+	0 ‖ 1	+	0	-	
f	-∞	↗	0	↗	f(α)	↘	0



1) Soit h la restriction de f à]-∞, 0[h étant continue et strictement croissante sur]-∞, 0[donc elle réalise une bijection de]-∞, 0[sur un intervalle J =]-∞, 0[

2) Voir courbe (($C'_{h^{-1}}$) et (C_h) sont symétriques par rapport à la première bissectrice