UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

12 G 18 Bis BR
2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 2ième groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (**5 points**).

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. Résoudre (E) puis donner la solution h telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 2$. 1 pt

2. On pose pour tout x réel $f(x) = e^{-x}\sin 2x$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$.

a. En utilisant le changement de variable $t = x - \pi$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. 1 pt

b. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. 1 pt

3. On pose pour tout x réel $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Calculer $g(x)$ et comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. **2 pts = 1 pt +1 pt**

Exercice 2 (**5 points**).

Un dé non truqué porte la lettre A sur deux faces et la lettre B sur les quatre autres faces. On lance le dé quatre fois de suite.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois A et une fois B ? 1 pt

2. On suppose que lorsque A apparait, on a un gain de a francs et que si c'est la lettre B qui apparait, on a une perte de b francs. On définit la variable aléatoire X qui à chaque série de quatre lancers associe le gain algébrique obtenu.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ? 0,5 pt

b. Définir la loi de probabilité de X. 1 pt

c. Calculer en fonction de a et b l'espérance mathématique $E(X)$ de X. 1 pt

3. On suppose maintenant que $a = 6$.

a. Trouver la valeur de b pour que X soit centrée (c'est à dire $E(X) = 0$.) 0,5 pt

b. Calculer dans ce cas la variance et l'écart-type de X. 1 pt

Exercice 3 (**5 points**).

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Montrer que le couple $(14n + 3; 21n + 4)$ est solution de (E). 0,5 pt

b. En déduire le pgcd de $14n + 3$ et $21n + 4$. 0,5 pt

2. Soit $d = \text{pgcd}(2n+1; 21n+4)$.

a. Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.
On pourra trouver deux entiers α et β tels que $\alpha(2n+1) + \beta(21n+4) = 13$. **1 pt**

b. Montrer que $n \equiv 6[13]$ si et seulement si $d = 13$. **1 pt**

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \text{ et } B = 14n^2 - 11n - 3.$$

a. Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$. **1 pt**

b. Déterminer en fonction de n le pgcd de A et B. **1 pt**

Exercice 4 (5 points).

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $3 - i$ et $2i$.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$, par r la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$ et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

1. Construire le point Ω image réciproque de B par h ($\Omega = h^{-1}(B)$). **1 pt**

2. Déterminer $t \circ r \circ h(\Omega)$. **1 pt**

3. Donner l'expression complexe de $t \circ r \circ h$. **1 pt**

4. Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $t \circ r \circ h$.
2 pts $=$ $4 \times 0,5$ **pt**