UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 33 824 65 81 - Tél. : 33 824 95 92 - 33 824 65 81

13 G 26 A R

Durée : 4 heures

Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).

EXERCICE 1 (05 points)

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_i la probabilité d'obtenir la face numérotée i lors d'un lancer. Le dé est pipé de telle manière que p_1, p_2, …et p_6, soient dans cet ordre six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

1) Montrer que $p_1 = \frac{32}{63}$. **(0,5 point)**
2) Calculer p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6. **(05 x 0,25 point)**
3) Soit A l'évènement « obtenir une face portant un numéro pair ».
   Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$. **(0,5 point)**
4) On dispose maintenant d'une urne U contenant deux jetons rouges et trois jetons verts.
   On lance le dé :
   - si A est réalisé on tire successivement sans remise deux jetons dans U
   - sinon on tire simultanément deux jetons dans U.

Soit D l'évènement « les deux jetons tirés sont de couleurs différentes ».

a) Calculer $p(D \cap A)$ et $p(\overline{A} \cap D)$. **(02 x 0,5 point)**
b) En déduire que $p(D) = \frac{3}{5}$ puis calculer $p(A/D)$. **(02 x 0,25 point)**

5) On répète 10 fois de suite dans les mêmes conditions et de façon indépendante le tirage précédent. Soit X la variable égale au nombre de réalisations de l'évènement D à l'issue des dix tirages.
   a) Déterminer la loi de probabilité de x. **(0,25 point)**
   b) Calculer la probabilité d'avoir deux fois deux jetons de couleurs différentes. **(0,5 point)**
   c) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes lors des deux premiers tirages sachant que les huit derniers tirages font apparaître chacun deux jetons de couleurs différentes. **(0,5 point)**

EXERCICE 2 (04 points)

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Placer le point A d'affixe $z_A = -2 + i$. **(0,25 point)**
2) Montrer que l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z telle que $|(1+i)\,z + 3 + i| = 2\sqrt{2}$ est l'ensemble des points M tels que AM = 2. **(0,5 point)**
3) Déterminer (E_1) puis le construire. **(02 x 0,5 point)**
4) Soit f la transformation du plan qui à M(z) associe M' (z') où z' = (1 + i) z + 3 + i.
   a) Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f. **(01 point)**
   b) Montrer que f(A) = O. **(0,25 point)**
   c) Soit M un point quelconque du plan distinct de Ω où l'affixe du point Ω est -1 + 3i.
      Donner un programme de construction de M' à partir de Ω et M. **(01 point)**

Epreuve du 1er groupe

EXERCICE 3 **(03 points)**

On considère l'équation différentielle (E) dans IR : $y'' + 2\sqrt{2}\,y' + 6\,y = 0$.

1) Résoudre (E). **(0,75 point)**
2) Montrer que la solution f de (E) telle que ($\mathscr{C}$ f) passe par A(0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\sqrt{2}\,x + 1$ est définie par :
   $f(x) = (\cos 2x)\, e^{-x\sqrt{2}}$. **(01,25 point)**
3) Soit : $F(x) = -\frac{1}{6}\,[\,f'(x) + 2\sqrt{2}\,f(x)]$, pour $x \in$ IR
   Démontrer que F est une primitive de f sur IR. **(0,5 point)**
4) En déduire le calcul de : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. **(0,5 point)**

EXERCICE 4 **(08 points)**

PARTIE A : Soit $g(x) = (2x - 1)\,e^x + 1$, $x \in$ IR.

Etudier les variations de g. Déduire le signe de g(x) pour $x \in\ ]0, +\infty[$. **(01 point)**

PARTIE B : Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(-x)}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}, & \text{si } x > 0 \text{ et} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Vérifier que f(x) existe pour tout réel $x \neq -1$. **(0,5 point)**
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats. **(01,5 point)**
3) Trouver les limites de f aux bornes de Df ensemble de définition de f. Etudier les branches infinies de ($\mathscr{C}_f$) courbe représentative de f dans un repère orthonormé. **(01 point)**
4) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$. **(0,5 point)**
5) Calculer f'(x) pour $x < 0$ et $x \neq -1$ et dresser le tableau de variations de f. **(01,5 point)**
6) Tracer ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. **(01 point)**
7) Soit h la restriction de f à $]0, +\infty[$.
   a) Montrer que h est une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,5 point)**
   b) Tracer la courbe de h^{-1} réciproque de h dans le même repère. **(0,5 point)**