Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. **Corrigé de l'épreuve n° 13 G 26 A N°1**. Année 2013

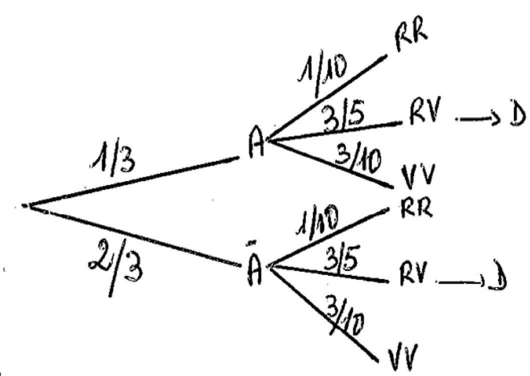
Exercice 1 :

1. $\sum_1^6 p_i = 1$ et $\sum_1^6 p_i = p_1 \dfrac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\dfrac{1}{2}}$. Ainsi $p_1 = \dfrac{32}{63}$.

2. Les p_i suivent une progression géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ on a :
   $p_2 = \dfrac{1}{2}p_1, \quad p_3 = \dfrac{1}{2}p_2, \quad p_4 = \dfrac{1}{2}p_3, \quad p_5 = \dfrac{1}{2}p_4, \quad p_6 = \dfrac{1}{2}p_5.$
   Ainsi : $p_2 = \dfrac{16}{63}, \quad p_3 = \dfrac{8}{63}, \quad p_4 = \dfrac{4}{63}, \quad p_5 = \dfrac{2}{63}, \quad p_6 = \dfrac{1}{63}.$

3. $p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{16+4+1}{63} = \dfrac{21}{63} = \dfrac{1}{3}.$

4. Construisons l'arbre de choix de cette expérience.



D : avoir RV.

$p(D \cap A) = \dfrac{1}{5}$ et $p(D \cap \overline{A}) = \dfrac{2}{5}$

$p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap \overline{A}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

$$p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3};$$

5. Tirages successifs avec remise, indépendance.
   $n = 10$, $p = p(D) = \frac{3}{5}$.

   a. La loi de probabilité de X

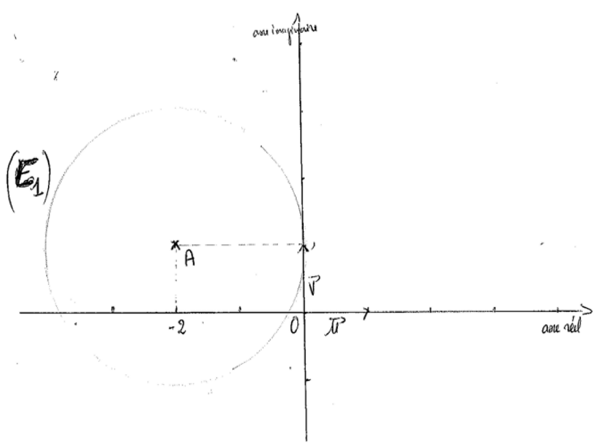
a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1024}{9765625}$	$\frac{15360}{9765625}$	$\frac{103680}{9765625}$	$\frac{414720}{9765625}$	$\frac{1088640}{9765625}$	$\frac{1959552}{9765625}$	$\frac{2449440}{9765625}$	$\frac{2099520}{9765625}$	$\frac{1180980}{9765625}$	$\frac{393660}{9765625}$	$\frac{59049}{9765625}$

   b. $p(X = 2) = C_{10}^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^8 = \frac{103680}{9765625}$.

   c. La probabilité p de cet évenement est : $p = \frac{9}{25}$.

Exercice 2 :

1. Plaçons le point A dans le repère.



2. $|(1+i)z + 3 + i| = |1+i||z + \frac{3+i}{1+i}| = \sqrt{2}|z + 2 - i| = \sqrt{2}AM$,
   Ainsi $|(1+i)z + 3 + i| = 2\sqrt{2}$ est équivalent à $\sqrt{2}AM = 2\sqrt{2}$ d'où $AM = 2$.
   Donc (E_1) est l'ensemble des points M du plan tel que $AM = 2$.

3. (E_1) est le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 : $\mathcal{C}(A, 2)$.
   (Construction voir Figure).

4. (a) f est la similitude de centre $\Omega(-1+3i)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, et de rapport $\sqrt{2}$.

   (b) $z'_A = (1+i)(-2+i)+3+i = -2+i-2i-1+3+i = 0$.
   D'où f(A)=O.

   (c) $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = \sqrt{2}$.
   <u>indication</u> : $[\Omega M']$ est la diagonale du carré $M\Omega K M'$.

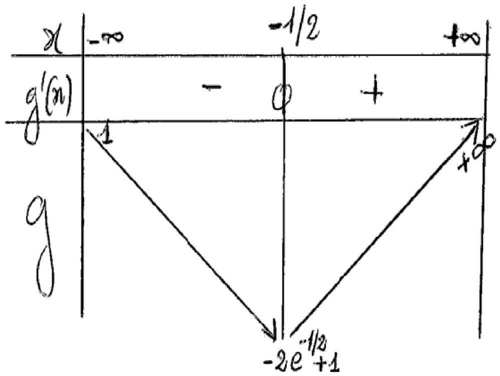
Exercice 3 :

1. $r^2 + 2\sqrt{2}r + 6 = 0$
   $r_1 = -\sqrt{2} + 2i$ et $r_2 = -\sqrt{2} - 2i$
   D'où $y = e^{-x\sqrt{2}}(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x), \ \ \alpha, \ \ \beta \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\sqrt{2}$
   $f(0) = 1$ d'où $\alpha = 1$,
   $f'(0) = -\sqrt{2}$ d'où $\beta = 0$,
   Donc $f(x) = (\cos 2x)e^{-x\sqrt{2}}$.
3. Soit $F(x) = \frac{-1}{6}[f'(x) + 2\sqrt{2}f(x)]$, pour $x \in \mathbb{R}$,
   On a $F'(x) = \frac{-1}{6}[f''(x) + 2\sqrt{2}f'(x)] = \frac{-1}{6}(-6f(x)) = f(x)$
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{6}(e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}} + 1)$

Exercice 4 :

PARTIE A.

Soit $g(x) = (2x-1)e^x + 1, x \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{+\infty} g = +\infty \quad \lim\limits_{-\infty} g = 1$
$g'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$
Dressons le tableau de variations de la fonction g.



Sur $]0,+\infty[$, $\;g(x) \geq 0$.

PARTIE B.

$$Soit f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(-x)}, & si \;\; x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}, & \text{si } \; x > 0 \\ 0, \; \text{si } \; x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

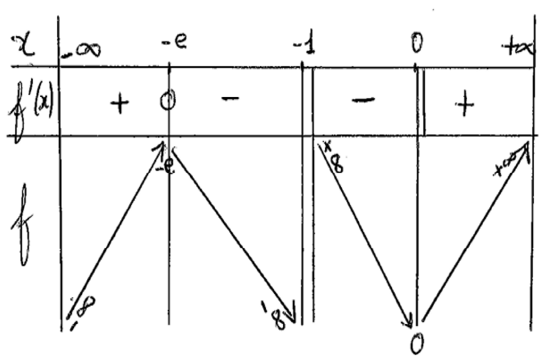
1. Sur $]-\infty;0[$: $\quad f(x)$ existe si $ln(-x) \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq -1$,
   Sur $]0;+\infty[$: $\quad f(x)$ existe si $\sqrt{x} \neq 0$, ce qui est toujours vrai sur $]0,+\infty[$,
   on a aussi $f(0) = 0$.
   D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. <u>Continuité de f en 0</u> ? :
   $f(0) = 0, \;\; \lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0$
   $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{x \to 0^-} x \times \dfrac{1}{\ln(-x)} = 0$
   f est continue en 0.
   <u>Dérivabilité de f en 0</u> ? :
   $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{e^x - 1}{x} = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{\ln(-x)} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\ln(-x)} = 0.$

La courbe représentative de f, $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

3. $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\ln(-x)} = -\infty$, $\lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x}{\ln(-x)} = -\infty$,
$\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x}{\ln(-x)} = +\infty$
$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = +\infty.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x}\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{e^x}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\ln(-x)} = 0$
en $+\infty$: Branche infinie de direction $(y^{'}Oy)$,
en $-\infty$: Branche parabolique de direction $(x^{'}Ox)$

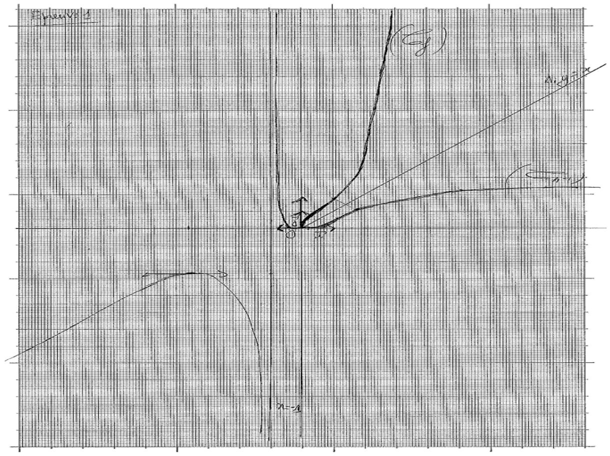
4. $\forall x > 0 \;\; f^{'}(x) = \dfrac{e^x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(e^x - 1)}{x} = \dfrac{2xe^x - e^x + 1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

5. $\forall x < 0$ et $x \neq -1$, on a
$f^{'}(x) = \dfrac{\ln(-x) - x\dfrac{1}{x}}{(\ln(-x))^2} = \dfrac{\ln(-x) - 1}{(\ln(-x))^2}.$
$\ln(-x) - 1 \geq 0$ équivalent à $\ln(-x) \geq 1$
équivalent à $-x \geq e$ d'où $f^{'}(x) \geq 0$ si $x \leq -e$
Dressons le tableau de variations de la fonction f.



6. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

d'unité graphique $1cm$.



7. Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$.
   (a) h est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc elle est bijective. Elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $J=]0;+\infty[$ d'après le tableau de variations de f.
   (b) La courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1} la bijection réciproque de h voir figure.